ФГАОУ ВО «Уральский Федеральный Университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»
Институт радиоэлектроники и информационных технологий – РТФ
Кафедра Вычислительных методов и уравнений математической физики

Математика

Программа, методические указания и контрольные задания I семестра
для студентов заочной формы обучения
всех специальностей

Екатеринбург
2016

Оглавление

Введение

В настоящих методических указаниях приведена программа, контрольные задания по математике за I семестр для студентов заочной формы обучения УрФУ. Указаны требования к оформлению контрольной работы и представлено решение нулевого варианта.

В межсессионный период по субботам один раз в месяц для студентов заочного обучения проводятся консультации по контрольным работам. Информация о датах и времени их проведения вывешивается на кафедральном стенде возле ауд. Р-336.

Во время экзаменационной сессии для студентов заочного обучения организуются обзорные лекции и практические занятия по программе текущего семестра, а также установочные лекции по программе следующего семестра.

Во время сдачи зачета или экзамена студент должен продемонстрировать знание и понимание основных теоретических и практических вопросов программы, уметь применять их при решении задач. При работе с определениями, теоремами и правилами студент должен уметь приводить их точную формулировку, как устную, так и письменную (использовать символьную запись), приводить примеры для их иллюстрации.

Программа

Программа по математике за первый семестр включает в себя 4 раздела:

1) элементы линейной алгебры;
2) векторная алгебра и аналитическая геометрия;
3) основы математического анализа;
4) дифференцирование функций нескольких переменных.

Задания в контрольной работе пронумерованы в соответствии с перечисленными разделами. Первая цифра определяет номер раздела, вторая цифра – номер задачи внутри одного раздела.

Рассмотрим более подробно содержание каждого раздела.

Элементы линейной алгебры

1. Понятие «матрица». Частные виды матрицы. Понятие определителя квадратной матрицы. Свойства определителей. Вычисление определителей 2го и 3го порядков.

2. Линейные операции над матрицами: сложение матриц, умножение матрицы на число. Умножение матриц. Понятие обратной матрицы, условие ее существования. Решение матричных уравнений с квадратной невырожденной матрицей.

3. Система линейных уравнений: понятие ее решения, матричная форма записи. Решение линейной системы с квадратной невырожденной матрицей по формулам Крамера. Решение линейной системы методом Гаусса. Однородная система линейных уравнений и ее решение. Применение метода Гаусса для отыскания обратной матрицы.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

1. Векторы в пространствах R_2 и R_3: линейные операции, базис, координаты, условие коллинеарности. Проекция вектора на ось.

2. Скалярное, смешанное и векторное произведение векторов в пространстве R_3: определения, свойства, формулы вычисления через координаты векторов в ортонормированном базисе.

3. Уравнение плоскости в пространстве R_3 с заданным нормальным вектором. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Определение угла между двумя плоскостями, вычисление расстояния от точки до плоскости.

4. Уравнение прямой на плоскости и в пространстве: канонические уравнения, параметрические уравнения; общие уравнения прямой. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости и в пространстве, прямой и плоскости. Определение угла между двумя прямыми на плоскости, угла между прямой и плоскостью.

5. Кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола и их канонические уравнения.

6. Поверхности второго порядка, их канонические уравнения и построение.

Основы математического анализа

1. Определение предела функции в точке, в бесконечности. Предел последовательности как частный случай предела функции. Односторонние пределы функции. Основные теоремы о пределе функции.

2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства; связь бесконечно больших функций с бесконечно малыми. Сравнение бесконечно малых, эквивалентные бесконечно малые функции.

3. Отыскание предела отношения двух многочленов при $x \to \infty$. Первый и второй замечательный пределы.

4. Функции, непрерывные в точке, и их свойства. Точки разрыва функции и их классификация. Функции, непрерывные на отрезке, и их свойства.

5. Определение производной. Дифференцируемая функция и ее дифференциал.

6. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью. Правила дифференцирования суммы, произведения, частного. Таблица производных.

7. Дифференцирование сложной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование обратной и параметрически заданной функции.

8. Производные и дифференциалы высших порядков. Инвариантность формы дифференциала.

9. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Использование правила Лопиталя при вычислении пределов для раскрытия неопределенностей вида $[\infty-\infty]$, $[0\cdot\infty]$, $[1^{\infty}]$, $[\infty^{0}]$.

10. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа. Формула Маклорена для основных элементарных функций.

11. Признаки возрастания и убывания функции на промежутке. Локальный экстремум функции. Необходимое условие экстремума; достаточные условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

12. Определение выпуклой кривой, вогнутой кривой, точки перегиба. Условия выпуклости и вогнутости кривой. Понятие асимптоты кривой, отыскание вертикальных и невертикальных асимптот. Общая схема исследования функции и построение ее графика.

Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

1. Понятие функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции.

2. Определение и вычисление частных производных. Определение дифференцируемой функции. Дифференциалы первого и второго порядков.

3. Понятие сложной функции и ее дифференцирование. Неявные функции и их дифференцирование. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, их уравнения.

4. Безусловный экстремум функции. Глобальный экстремум функции в замкнутой ограниченной области. Условный экстремум функции.

Требования к оформлению контрольной работы

В процессе изучения курса математики студент должен выполнить в каждом семестре одну контрольную работу. Контрольная работа № 1 состоит из 11 заданий (20 задач). Каждая задача представлена в 10 вариантах. Студент решает одну из десяти однотипных задач в соответствии со своим вариантом. Номер варианта определяется по последней цифре номера студенческого билета или зачетной книжки (если последняя цифра 0, то необходимо решить задачи 10 варианта).

При выполнении контрольных работ нужно придерживаться следующих правил.

1. Каждую контрольную работу следует выполнять в отдельной тонкой тетради в клетку (не более 24 листов), оставляя поля для замечаний рецензента.

2. На обложке тетради необходимо указать: а) свою фамилию и инициалы; б) институт; в) номер группы; г) номер зачетной книжки; д) номер контрольной работы; е) название дисциплины (см. приложение).

Помимо общих данных на титульном листе печатается матрица учета задач.

1.1	1.2.		2.1.		2.2.		2.3.		
	а	б	а	б	а	б	а	б	в

3.1.			3.2.		3.3.	3.4.		4.1.	4.2.
а	б	в	а	б		а	б		

Отметку о правильном выполнении задачи (+) ставит преподаватель.

3. В контрольную работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, и в строгом соответствии с номером своего варианта.

4. Решения задач в каждой контрольной работе следует располагать обязательно в порядке номеров, указанных в задании (см. матрицу учета задач).

5. Оформление решения каждой задачи должно обязательно включать в себя запись условия задачи в начале и ответ (отдельно выделенной строкой) в конце.

6. Решения задач должны содержать подробные пояснения и необходимые рисунки. Все решения и рисунки выполняются от руки. Использование онлайн-калькуляторов разрешается только для проверки правильности Вашего решения. В случае прямого копирования работы онлайн-калькулятора решение задачи не засчитывается.

7. После получения прорецензированной работы студент должен исправить все отмеченные рецензентом замечания и недочеты, а также выполнить все его рекомендации. Исправления нужно записывать в этой же тетради после всех решенных задач контрольной работы. Вносить исправления в тексты решения задач после рецензирования запрещается.

Не зачтенную контрольную работу с последующими соответствующими исправлениями следует направить на повторную рецензию.

8. Контрольная работа в каждом семестре должна быть представлена для рецензирования не позднее, чем за **2 недели** до начала экзаменационной сессии. Рецензирование контрольных работ, присланных позже указанного срока, переносится на начало следующего семестра.

Контрольная работа считается зачтенной при наличии всех правильно выполненных задач (на титульном листе ставится соответствующая отметка).

Прорецензированную и зачтенную контрольную работу студент должен предъявлять экзаменатору перед сдачей зачета или экзамена.

Решение нулевого варианта

Контрольная работа № 1

Задание 1.1.

Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Матричное уравнение имеет вид $X \cdot A = B$, где A и B – известные матрицы. Выразим X: $X \cdot A = B \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$; $A \cdot A^{-1} = E$, E – единичная матрица (аналог единицы для действительных чисел). Получим $X = B \cdot A^{-1}$. Заметим, что поскольку умножение матриц не обладает свойством коммутативности ($A \cdot B \neq B \cdot A$), то если мы в левой части умножаем на A^{-1} справа, то и в правой части тоже умножаем на A^{-1} справа!

Итак, $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$.

Находим обратную матрицу для матрицы $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1 способ – метод присоединенной матрицы.

Находим определитель исходной матрицы:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2(2-0) + 2(2-0) - 1(1-0) = -1.$$

Транспонируем исходную матрицу $A^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A^T:

$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2,\qquad A_{12}=(-1)\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=3,\qquad A_{13}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1,$

$A_{21}=(-1)\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-2,\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-4,\qquad A_{23}=(-1)\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-1,$

$A_{31}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1,\qquad A_{32}=(-1)\begin{vmatrix}-2 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}=2,\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=0.$

Строим присоединенную матрицу $A_p=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -2 & -4 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$, делим каждый элемент на $|A|$, получим $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & -3 & -1\\ 2 & 4 & 1\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

Делаем проверку: $AA^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -3 & -1\\ 2 & 4 & 1\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2 способ – метод элементарных преобразований.

Строим матрицу вида $(A|E)$: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}-2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$

С помощью элементарных преобразований будем приводить матрицу A к виду единичной матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\\ -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0\end{array}\right)\overset{3}{\sim}$$

$$\overset{3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0\end{array}\right)\overset{4}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0\end{array}\right)\overset{5}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -2 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0\end{array}\right).$$

В ходе решения были выполнены следующие преобразования

1) поменяли строки местами;

2) умножили первую строку на 2 и прибавили к третьей;

3) умножили третью строку на (–1);

4) умножили третью строку на (–2) и прибавили ко второй;

5) умножили вторую строку на (–1) и прибавили к первой.

Справа от черты стоит искомая матрица $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Подставляем A^{-1} в выражение для X:

$$X=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $X=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Замечание. При решении данной задачи в контрольной работе нужно применить только один из двух способов нахождения обратной матрицы.

Задание 1.2.

Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 2x+3y-z=7, \\ x-2y+z=-4, \\ x+y+z=2. \end{cases}$ методом Крамера;

б) $\begin{cases} x-3y+2z=-6, \\ x-y-2z=-4, \\ 2x-5y+2z=-11; \end{cases}$ методом Гаусса (если система имеет бесконечное множество решений, то найти общее решение через свободную переменную z и частное решение при $z = 1$).

Решение.

а) Согласно методу Крамера неизвестные x_i находят по формуле $x_i=\dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, где $\Delta-$ определитель матрицы, состоящей из коэффициентов при неизвестных СЛУ, Δ_i − определитель матрицы, полученный из Δ заменой i-ого столбца на столбец свободных коэффициентов.

Вычисляем определители разложением по первой строке:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-2-1) - 3(1-1) - 1(1-(-2)) = -6 - 0 - 3 = -9.$$

Основной определитель системы отличен от нуля, значит система совместна и имеет единственное решение.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 7(-2-1) - 3(-4-2) - 1(-4-(-4)) = -21 + 18 - 0 = -3.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-4-2) - 7(1-1) - 1(2-(-4)) = -12 - 0 - 6 = -18.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-4-(-4)) - 3(2-(-4)) + 7(1-(-2)) = 0 - 18 + 21 = 3.$$

Тогда $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{-3}{-9} = \dfrac{1}{3}$; $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{-18}{-9} = 2$; $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = \dfrac{3}{-9} = -\dfrac{1}{3}$.

б) Составляем матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & -5 & 2 & -11 \end{array}\right)$. С помощью элементарных преобразований приводим матрицу к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & -5 & 2 & -11 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

В ходе решения были выполнены следующие преобразования

1) умножили первую строку на (−1) и прибавили ко второй строке, затем умножили первую строку на (−2) и прибавили к третьей строке;

2) умножили вторую строку на (−1/2) и прибавили к третьей строке, элементы второй строки сократили на 2;

3) убрали нулевую строку.

Согласно теореме Кронекера-Капелли ранги основной и расширенной матрицы системы совпадают, следовательно, система совместна. При этом ранг меньше количества неизвестных, значит, система имеет бесконечно много решений. Найдем общее решение через свободную переменную z. Для этого продолжим преобразования матрицы так, чтобы первые два столбца образовывали единичную матрицу второго порядка:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$ (умножили вторую строку на 3 и прибавили к первой строке).

Запишем систему, соответствующую полученной матрице и выразим базисные неизвестные x, y через свободную неизвестную z:

$$\begin{cases} x - 4z = -3, \\ y - 2z = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4z - 3, \\ y = 2z + 1. \end{cases}$$

Последняя система определяет общее решение. Если взять $z = 1$, то получим частное решение системы: $\begin{cases} x = 1, \\ y = 3, \\ z = 1. \end{cases}$

Ответ. а) $x = \dfrac{1}{3}, \quad y = 2, \ z = -\dfrac{1}{3};$

б) $\begin{cases} x = 4z - 3, \\ y = 2z + 1, \end{cases}$ – общее решение, $\begin{cases} x = 1, \\ y = 3, \\ z = 1, \end{cases}$ – частное решение.

Задание 2.1.

Даны координаты трех точек A (9, 4), B (3, 8), C (5, 6).

а) Найти уравнение прямой AH, перпендикулярной прямой BC в общем, каноническом и параметрическом виде.

б) Определить взаимное расположение векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BC}$, где O – середина BC.

Решение.

а) *Дано:* A (9, 4), B (3, 8), C (5, 6).

Найти: AH, где $AH \perp BC$.

Для того чтобы написать уравнение прямой AH, нужно сначала ее описать, т.е. определить, что нам о ней известно и записать всю информацию аналитически (с помощью математических выражений).

Во-первых, по названию прямой известно, что она проходит через точку A (9, 4). Во-вторых, имеется условие $AH \perp BC$.

Поскольку на прямой BC известны координаты точек B и C, то мы можем найти вектор $\overrightarrow{BC}$, который для прямой BC называется направляющим[1].

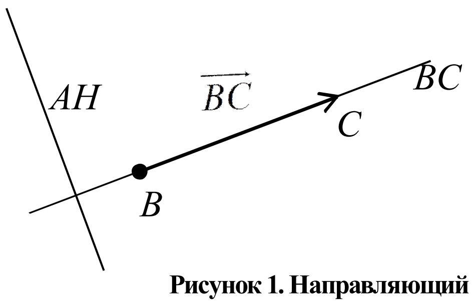

Рисунок 1. Направляющий вектор прямой *BC*

[1] Вектор, который параллелен прямой, называется направляющим вектором этой прямой. Можно представить, что направляющий вектор задает «направление» прямой в пространстве. Понятно, чт параллельные друг другу прямые будут иметь один и тот же направляющий вектор. Поэтому для описания конкретной прямой указания только направляющего вектора недостаточно. Достаточно указать еще одну точку, через которую проходит эта прямая.

Для того чтобы найти координаты вектора $\overrightarrow{BC}$ нужно из координат конца вектора – точки C (5, 6) вычесть соответствующие координаты начала вектора - точки B (3, 8): $\overrightarrow{BC} = \{5-3;\, 6-8\}$, $\overrightarrow{BC} = \{2;\, -2\}$.

Из рис. 1 видно, что $\overrightarrow{BC} \perp AH$.

Вектор, перпендикулярный прямой, называется для нее нормальным. Значит, $\overrightarrow{BC}$ – нормальный вектор прямой AH.

Получили, что искомая прямая AH задана точкой A (9, 4) и нормальным вектором $\vec{n}_{AH} = \overrightarrow{BC} = \{2;\, -2\}$.

Известно, что координаты нормального вектора есть коэффициенты перед x и y в общем уравнении прямой[2].

Пусть общее уравнение прямой AH имеет вид: $Ax + By + C = 0$.

Тогда вместо A и B подставляем координаты нормального вектора $\vec{n}_{AH} = \{2;\, -2\}$.

$$AH : 2x - 2y + C = 0.$$

Чтобы найти значение неизвестного параметра C, используем известную на AH точку A. Точка A лежит на прямой AH тогда и только тогда, когда координаты точки удовлетворяют уравнению прямой. Это значит, что при подстановке координат точки в уравнение прямой мы получим верное равенство.

$$2 \cdot 9 - 2 \cdot 4 + C = 0.$$

Откуда следует, что $C = -10$.

Итак, получили общее уравнение прямой $AH : 2x - 2y - 10 = 0$.

Каноническое уравнение прямой на плоскости имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{l_1} = \frac{y - y_0}{l_2},$$

[2]На плоскости прямая задается линейным уравнением $Ax + By + C = 0$. Такое уравнение называется общим уравнением прямой на плоскости.

где l_1, l_2 – координаты направляющего вектора прямой, а x_0, y_0 – координаты произвольной точки на этой прямой.

Точка на прямой *AH* у нас известна: *A* (9, 4).

Для того чтобы найти направляющий вектор, нам нужна еще одна точка прямой *AH*. Известно, что точка лежит на прямой, если при подстановке координат точки в уравнение прямой мы получаем верное равенство (говорят: «координаты точки удовлетворяют уравнению прямой»).

Поскольку мы ищем любую точку прямой, то одну из координат можно выбрать произвольно. Пусть $x = 2$. Подставим его в уравнение прямой *AH*:

$$2 \cdot 2 - 2y - 10 = 0.$$

Получим $y = -3$. Вторая точка прямой *AH* найдена: $H(2, -3)$. $\overrightarrow{AH} = \{2-9, -3-4\} = \{-7, -7\}$ – направляющий вектор прямой *AH*.

Поскольку направляющим вектором будут также все векторы, коллинеарные вектору $\overrightarrow{AH}$, то в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\vec{l} = \{1,1\}$.

Итак, прямая *AH* задана точкой *A* (9, 4) и направляющим вектором $\vec{l} = \{1,1\}$.

Запишем каноническое уравнение прямой

$$AH: \frac{x-9}{1} = \frac{y-4}{1}.$$

Мы можем продолжить запись

$$AH: \frac{x-9}{1} = \frac{y-4}{1} = t, \text{ где } t \in R.$$

Распишем два равенства в системе:

$$\begin{cases} \dfrac{x-9}{1} = t, \\ \dfrac{y-4}{1} = t; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = t + 9, \\ y = t + 4. \end{cases}$$

Получили параметрическое уравнение прямой.

Ответ. Общее уравнение прямой $AH: 2x-2y-10=0$; каноническое уравнение прямой $AH: \dfrac{x-9}{1}=\dfrac{y-4}{1}$; параметрическое уравнение прямой $AH: \begin{cases} x=t+9, \\ y=t+4, \end{cases}$ где $t \in R$.

б) *Дано*: B (3, 8), C (5, 6), O – середина BC.

Найти: угол между векторами $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Определить взаимное расположение векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BC}$, значит – найти угол между ними.

Найдем координаты векторов. $\overrightarrow{BC}=\{5-3, 6-8\}=\{2,-2\}$.

Так как O – середина BC, то ее координаты удовлетворяют условию:

$x_{середина}=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y_{середина}=\dfrac{y_1+y_2}{2}$, где (x_1, y_1), (x_2, y_2) − координаты конечных точек отрезка.

Тогда $O\left(\dfrac{3+5}{2}, \dfrac{8+6}{2}\right)$, т. е. $O(4,7)$.

Получим $\overrightarrow{AO}=\{4-9, 7-4\}=\{-5,3\}$.

Найдем угол между векторами $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BC}}\right)=\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AO}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}.$$

По формуле скалярного произведения векторов (через координаты):

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=-5\cdot 2+3\cdot(-2)=16.$$

Находим длины векторов:

$$\left|\overrightarrow{AO}\right|=\sqrt{(-5)^2+3^2}=\sqrt{34}, \left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$$

Тогда $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BC}}\right)=\dfrac{16}{\sqrt{34}\cdot 2\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$.

Так как знак косинуса положительный, то векторы $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BC}$ располагаются под острым углом, величина которого равна $\arccos\frac{4\sqrt{17}}{17}$.

Ответ. Векторы $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BC}$ располагаются под острым углом, величина которого равна $\arccos\frac{4\sqrt{17}}{17}$.

Задание 2.2.

Привести уравнения второго порядка к каноническому виду. Определить тип кривой, которое оно задает. Построить кривую.

а) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$;

б) $x - 3 - \sqrt{-6y + 12} = 0$.

Решение.

а) Выделим полные квадраты относительно каждой переменной в левой части уравнения, а свободные члены перенесем в правую часть:

$$9x^2 - 16y^2 + 36x + 32y + 164 = 0;$$

$$9(x^2 + 4x) - 16(y^2 - 2y) = -164;$$

$$9((x^2 + 4x + 4) - 4) - 16((y^2 - 2y + 1) - 1) = -164;$$

$$9(x^2 + 2)^2 - 36 - 16(y^2 - 1)^2 + 16 = -164;$$

$$9(x^2 + 2)^2 - 16(y^2 - 1)^2 = -144;$$

$$\frac{9(x+2)^2}{144} - \frac{16(y-1)^2}{144} = -1;$$

$$-\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1.$$

Получаем каноническое уравнение гиперболы[3] с центром в точке $C(-2;\ 1)$, мнимой полуосью $a = 4$, действительной полуосью $b = 3$ (рис. 2).

---

[33] Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ или $-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$.

Для построения гиперболы строим основной прямоугольник с центром C, сторонами $2a$ и $2b$, параллельными соответственно осям координат Ox и Oy, проводим пунктиром прямые, содержащие диагонали прямоугольника (асимптоты гиперболы). Отмечаем вершины гиперболы $(x_0;\, y_0 \pm b) = \left[\begin{array}{l} (-2;\,4) \\ (-2;-2) \end{array}\right.$ и проводим через них две ее ветви, приближающиеся к асимптотам.

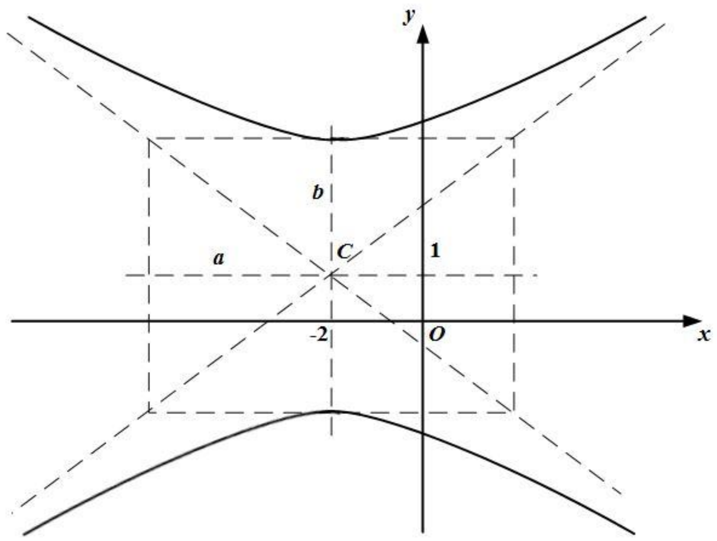

Рисунок 2. Гипербола

б) Перенесем выражение, содержащее корень, в правую часть:

$$x - 3 = \sqrt{-6y + 12}.$$

При решении необходимо учесть неотрицательность выражения в левой части равенства (т.к. корень в правой части равенства дает только неотрицательные значения), то есть $x - 3 \geq 0$; возведем обе части исходного уравнения в квадрат и вынесем коэффициент при переменной в правой части уравнения:

$$(x - 3)^2 = -6y + 12;$$

$$(x - 3)^2 = -6(y - 2).$$

Учитывая ограничения, получим систему:

$$\begin{cases} (x-3)^2 = -6(y-2); \\ x \geq 3. \end{cases}$$

Уравнение $(x-3)^2=-6(y-2)$ является каноническим уравнением параболы[4] с вершиной в точке $C(3;\,2)$, осью симметрии $x=3$; ветви параболы направлены вниз. С учетом условия $x\geq 3$ получаем правую ветвь этой параболы (рис. 3). Параметр $2p=6$ определяет сжатие параболы $x^2=y$ вдоль оси симметрии в 6 раз[5].

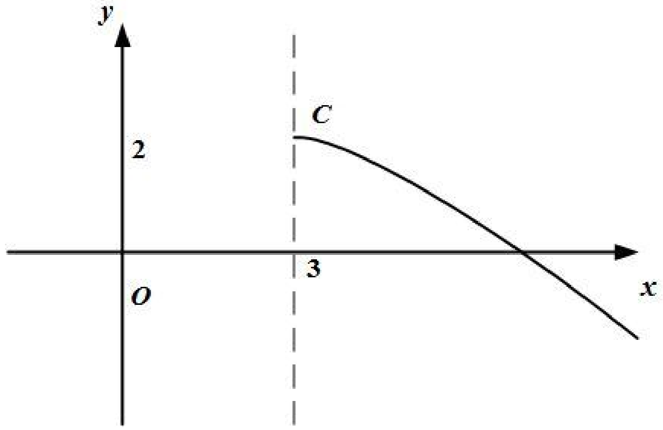

Рисунок 3 Ветвь параболы

Задание 2.3.

Даны координаты четырех точек:

$$A(4,1,3),\ \ B(0,2,1),\ \ C(-1,3,2),\ \ D(2,2,-5).$$

а) Написать уравнение плоскости ABC;

б) Найти площадь треугольника ABC;

в) Найти двумя способами длину высоты, опущенной из вершины D тетраэдра $ABCD$ на грань ABC (используя формулы векторной алгебры и формулу расстояния от точки до прямой).

Решение.

а) Для того чтобы написать уравнение плоскости нужна произвольная точка на этой плоскости и два вектора, параллельные плоскости.

$$ABC:\ A(4,1,3),\ \overrightarrow{AB}=\{-4,1,-2\},\overrightarrow{AC}=\{-5,2,-1\}.$$

Находим уравнение плоскости ABC по трем точкам:

---

[4] Каноническое уравнение параболы имеет вид $(x-x_0)^2=\pm 2p(y-y_0)$ или $(y-y_0)^2=\pm 2p(x-x_0)$

[5] Для более точного построения можно найти дополнительную точку. В частности, при $x=6$ получаем, что $y=0{,}5$; т. е. ветвь параболы проходит через точку (6; 0,5).

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z-3 \\ -4 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (x-4)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (y-1)\cdot\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} + (z-3)\cdot\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(x-4) - (-6)(y-1) + (-3)(z-3) = 3x + 6y - 3z - 9 = 0.$$

$$ABC:\ x + 2y - z - 3 = 0.$$

Ответ. $ABC:\ x + 2y - z - 3 = 0.$

б) Площадь треугольника можно найти с помощью приложений векторного произведения: $S_{ABC} = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right|.$

Площадь ΔABC, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, равна половине длины их векторного произведения.

Вычисляем векторное произведение:

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Найдем длину полученного вектора:

$$\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}.$$

Тогда $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \dfrac{3\sqrt{6}}{2}.$

Ответ. $S_{\Delta ABC} = \dfrac{3\sqrt{6}}{2}.$

в) Двумя способами найти длину высоты, опущенной из вершины D тетраэдра $ABCD$ на грань ABC.

1 способ: через приложение смешанного произведения векторов к вычислению объема тетраэдра.

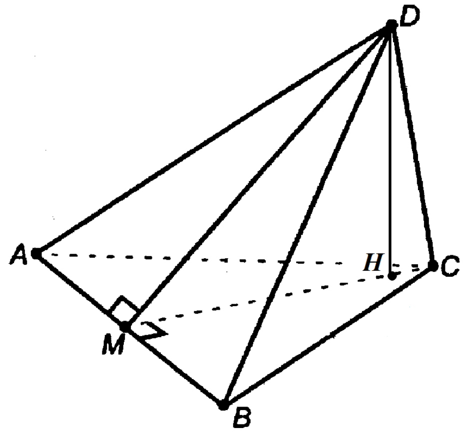

Рисунок 4. Высота тетраэдра

Объем тетраэдра, с одной стороны, равен одной шестой модуля смешанного произведения трех векторов, на которых он построен:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|.$$

С другой стороны, $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot DH$, отсюда $DH = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta ABC}}$.

Получим, что $DH = \frac{\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|}{2S_{\Delta ABC}} = \frac{\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|}$.

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -8 \end{vmatrix} = 24.$$

$$DH = \frac{24}{3\sqrt{6}} = \frac{8}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

2 способ: применить формулу расстояния от точки до плоскости.

Длина высоты тетраэдра равна расстоянию от точки $D(2, 2, -5)$ плоскости ABC.

Расстояние от точки до плоскости можно найти по формуле:

$$d(D,\ ABC) = \frac{\left|Ax_D + By_D + Cz_D + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Числитель получается, если в левую часть уравнения плоскости ABC подставить координаты точки D.

В знаменателе находится длина нормального вектора плоскости ABC (координаты нормального вектора плоскости – коэффициенты перед неизвестными в ее уравнении).

Получим: $DH = d(D,\ ABC) = \dfrac{|1\cdot 2 + 2\cdot 2 - 1\cdot(-5) - 3|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \dfrac{8}{\sqrt{6}} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}.$

Ответ. $DH = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}.$

Задание 3.1.

Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x+5}-2}$; б) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg} x\cdot(x+\pi/2)\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{4x}$.

Решение.

а) Числитель и знаменатель дроби при $x\to -1$ обращаются в ноль. Значит, имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для раскрытия неопределенности умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю, разложив перед этим числитель на множители: $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$[6]. Получим

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{\sqrt{x+5}-2} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)\left(\sqrt{x+5}+2\right)}{\left(\sqrt{x+5}-2\right)\left(\sqrt{x+5}+2\right)} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)\left(\sqrt{x+5}+2\right)}{x+5-4} =$$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)\left(\sqrt{x+5}+2\right)}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x-2)\left(\sqrt{x+5}+2\right) = -3\cdot 4 = -12.$$

б) При подстановке предельного значения получаем неопределенность вида $[\infty\cdot 0]$. Для раскрытия неопределенности сделаем замену и используем эквивалентную функцию:

---

[6] Первый корень получаем из предельного значения x, второй корень определяем по теореме Виета: если приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет действительные корни, то их сумма равна $-p$, а произведение равно q.

$$\lim_{x\to-\pi/2}\left(\operatorname{tg}x\cdot(x+\pi/2)\right)=\begin{bmatrix} y=x+\pi/2 \\ y\to 0 \text{ при } x\to-\pi/2 \end{bmatrix}=\lim_{y\to 0}\left(\operatorname{tg}(y-\pi/2)\cdot y\right)=$$

$$=-\lim_{y\to 0}\left(\operatorname{tg}(\pi/2-y)\cdot y\right)=-\lim_{y\to 0}\left(\operatorname{ctg}y\cdot y\right)=-\lim_{y\to 0}\left(\frac{y}{\operatorname{tg}y}\right)=\left[\operatorname{tg}y\sim y \text{ при } y\to 0\right]=$$

$$=-\lim_{y\to 0}\left(\frac{y}{y}\right)=-1.$$

в) Делением числителя на знаменатель выделим целую часть:

$$\begin{array}{r|l} -\;2x+3 & 2x-1 \\ \cline{2-2} 2x-1 & 1 \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$

Таким образом, $\dfrac{2x+3}{2x-1}=1+\dfrac{4}{2x-1}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{4x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{2x-1}\right)^{4x}$.

При $x\to\infty$ основание функции стремится к единице, а показатель к бесконечности, получили неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$. Для раскрытия неопределенности преобразуем функцию так, чтобы использовать второй замечательный предел: $\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^{y}=e$. Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{4x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{4x\cdot\frac{2x-1}{4}\cdot\frac{4}{2x-1}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4}}\right]^{\frac{16x}{2x-1}}=$$

$$=\left[\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4}}\to e \text{ при } x\to\infty\right]=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{16x}{2x-1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{16x:x}{(2x-1):x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{16}{2-1/x}}=e^{\frac{16}{2}}=e^{8}.$$

Задание 3.2.

Найти производные функций:

а) $y=\dfrac{\sqrt{x^3+4}}{x^2-1}+3^{\sin x}\cdot\ln(1-x^4)+\pi^{e}$; б) $y=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{\ln x}$.

Решение.

а) Для нахождения производной первой функции используем правила дифференцирования и таблицу производных элементарных функций.

Данную функцию представим в виде суммы трех функций и вычислим производную каждого слагаемого: $y = y_1 + y_2 + y_3$.

$y_1' = \left(\dfrac{\sqrt{x^3+4}}{x^2-1} \right)' =$ [используем правила дифференцирования частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, суммы и разности функций $(u \pm v)' = u' \pm v'$ и правило дифференцирования сложной функции: если $y = y(u)$, $u = u(x)$, то $y_x' = y_u' \cdot u_x'$] $= \dfrac{\left(\sqrt{x^3+4}\right)' \cdot \left(x^2-1\right) - \sqrt{x^3+4} \cdot \left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2} =$

$$= \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x^3+4}}\left(x^3+4\right)' \cdot \left(x^2-1\right) - \sqrt{x^3+4} \cdot (2x-0)}{\left(x^2-1\right)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{3x^2+0}{2\sqrt{x^3+4}} \cdot \left(x^2-1\right) - 2x \cdot \sqrt{x^3+4}}{\left(x^2-1\right)^2} =$$

$$= \frac{3x^2 \cdot \left(x^2-1\right) - 4x \cdot \left(x^3+4\right)}{2\sqrt{x^3+4} \cdot \left(x^2-1\right)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 4x^4 - 16x}{2\sqrt{x^3+4} \cdot \left(x^2-1\right)^2} = \frac{-\left(x^4 + 3x^2 + 16x\right)}{2\sqrt{x^3+4} \cdot \left(x^2-1\right)^2};$$

$y_2' = \left(3^{\sin x} \cdot \ln\left(1-x^4\right)\right)' =$ [используем правила дифференцирования произведения $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$, разности функций и правило дифференцирования сложной функции]=

$$=\left(3^{\sin x}\right)'\cdot\ln\left(1-x^4\right)+3^{\sin x}\cdot\left(\ln\left(1-x^4\right)\right)'=$$

$$=3^{\sin x}\cdot\ln 3\cdot(\sin x)'\cdot\ln\left(1-x^4\right)+3^{\sin x}\cdot\frac{1}{1-x^4}\cdot\left(1-x^4\right)'=$$

$$=3^{\sin x}\cdot\ln 3\cdot\cos x\cdot\ln\left(1-x^4\right)+3^{\sin x}\cdot\frac{-4x^3}{1-x^4}=3^{\sin x}\cdot\left(\ln 3\cdot\cos x\cdot\ln\left(1-x^4\right)+\frac{4x^3}{x^4-1}\right);$$

$y_3'=\left(\pi^e\right)'=0$ [функция является константой, поэтому ее производная равна нулю].

Запишем производную исходной функции

$$y'=y_1'+y_2'+y_3'=\frac{-\left(x^4+3x^2+16x\right)}{2\sqrt{x^3+4}\cdot\left(x^2-1\right)^2}+3^{\sin x}\cdot\left(\ln 3\cdot\cos x\cdot\ln\left(1-x^4\right)+\frac{4x^3}{x^4-1}\right).$$

Ответ. $y'=\dfrac{-\left(x^4+3x^2+16x\right)}{2\sqrt{x^3+4}\cdot\left(x^2-1\right)^2}+3^{\sin x}\cdot\left(\ln 3\cdot\cos x\cdot\ln\left(1-x^4\right)+\dfrac{4x^3}{x^4-1}\right).$

б) Для нахождения производной второй функции используем правило логарифмического дифференцирования. Логарифмируя обе части равенства, получим $\ln y=\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{\ln x}$ или, по свойству логарифмов, $\ln y=\ln x\left(\ln x-\ln(x+1)\right)$. Продифференцируем обе части последнего равенства по x:

$$(\ln y)'=\left(\ln x\left(\ln x-\ln(x+1)\right)\right)';$$

$$(\ln y)'=\frac{1}{y}\cdot y';$$

$$\left(\ln x\left(\ln x-\ln(x+1)\right)\right)'=(\ln x)'\cdot\left(\ln x-\ln(x+1)\right)+\ln x\cdot\left((\ln x)'-\left(\ln(x+1)\right)'\right)=$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\left(\ln x-\ln(x+1)\right)+\ln x\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{2\ln x}{x}-\frac{\ln(x+1)}{x}-\frac{\ln x}{x+1}.$$

Таким образом, $\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{2\ln x}{x}-\frac{\ln(x+1)}{x}-\frac{\ln x}{x+1}$, откуда получаем

$$y'=y\cdot\left(\frac{2\ln x}{x}-\frac{\ln(x+1)}{x}-\frac{\ln x}{x+1}\right)=\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\ln x}\cdot\left(\frac{2\ln x}{x}-\frac{\ln(x+1)}{x}-\frac{\ln x}{x+1}\right).$$

Ответ. $y'=\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\ln x}\cdot\left(\frac{2\ln x}{x}-\frac{\ln(x+1)}{x}-\frac{\ln x}{x+1}\right)$.

Задание 3.3.

Вычислить предел, используя правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right)$.

Решение.

Правило Лопиталя используется для раскрытия неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. При $x\to 0$ получаем неопределенность вида $[\infty-\infty]$, поэтому преобразуем предельную функцию: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}x}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x\cdot x}$. Получили неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$ и можем применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\operatorname{tg}x)'}{(\operatorname{tg}x\cdot x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}\cdot x+\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x+\sin x\cdot\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x+\frac{1}{2}\sin 2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=/\text{применяем правило Лопиталя}/=-\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin^2 x\right)'}{\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)'}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{1+\frac{1}{2}\cdot 2\cos 2x}=\left[\frac{0}{2}\right]=0.$$

Замечание. Можно упростить вычисления, если использовать эквивалентные функции:

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x\cdot x}=\begin{bmatrix}\operatorname{tg}x\sim x \text{ при } x\to 0\\ \text{заменить можем только}\\ \text{множитель в знаменателе}\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{tg}x}{x^2}=/\text{используем правило Лопиталя}/=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{\cos^2 x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{2x\cdot\cos^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{2x\cdot\cos^2 x}=\left[\sin x\sim x \text{ при } x\to 0\right]=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x\cdot\cos^2 x}=-\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2\cos^2 x}=0.$$

Задание 3.4.

Провести полное исследование функции с помощью производных первого и второго порядков. По результатам исследования построить графики функций.

а) $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$; б) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Решение.

Исследуем первую функцию.

1. Область определения функции $D(x)=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$,т.к. знаменатель дроби не может быть равен нулю.

2. Проверяем четность (нечетность функции):

$$y(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-4}=\frac{-x^3}{x^2-4}=-y(x).$$

Следовательно, функция является нечетной (ее график симметричен относительно начала координат).

3. Функция не является периодической, т.к. является отношением двух элементарных не периодических функций.

4. Находим асимптоты.

Из области определения имеем точку разрыва $x=2$, причем $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3}{x^2-4}=\infty$, следовательно, $x=2$ является вертикальной асимптотой графика функции. В силу нечетности функции $x=-2$ так же является вертикальной асимптотой.

Ищем наклонную асимптоту $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2-4)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2:x^2}{(x^2-4):x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-4/x^2}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(y-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x(x^2-4)}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x:x^2}{\left(x^2-4\right):x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4/x}{1-4/x^2}=0.$$

Уравнение наклонной асимптоты: $y=x$.

5. Находим экстремумы функции и интервалы возрастания и убывания:

$$y'=\left(\frac{x^3}{x^2-4}\right)'=\frac{3x^2\cdot\left(x^2-4\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{x^4-12x^2}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{x^2\left(x^2-12\right)}{\left(x^2-4\right)^2};$$

$y'=0$ при $x=0,\ x=\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3};$ при $x=\pm2$ y' не существует.

Найденные точки разбивают область определения функции на промежутки монотонности. Определим знак производной и в зависимости от него возрастание или убывание функции. Результаты исследования представим в виде таблицы (в силу нечетности функции достаточно рассмотреть только область при $x\geq 0$).

x	0	$(0;2)$	2	$(2;2\sqrt{3})$	$2\sqrt{3}$	$(2\sqrt{3};+\infty)$
y'	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
y	0	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	$3\sqrt{3}$ min	$\nearrow$

Точка $x=0$ не является экстремумом, т.к. при переходе через нее производная не меняет знак.

6. Находим интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба:

$$y''=\left(\frac{x^4-12x^2}{\left(x^2-4\right)^2}\right)'=\frac{\left(4x^3-24x\right)\cdot\left(x^2-4\right)^2-\left(x^4-12x^2\right)\cdot 2\left(x^2-4\right)\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^4}=$$

$$=\frac{\left(4x^3-24x\right)\cdot\left(x^2-4\right)-\left(x^4-12x^2\right)\cdot 4x}{\left(x^2-4\right)^3}=\frac{4x\cdot\left(\left(x^2-6\right)\cdot\left(x^2-4\right)-\left(x^4-12x^2\right)\right)}{\left(x^2-4\right)^3}=$$

$$=\frac{4x\cdot\left(x^4-4x^2-6x^2+24-x^4+12x^2\right)}{\left(x^2-4\right)^3}=\frac{4x\cdot\left(2x^2+24\right)}{\left(x^2-4\right)^3}=\frac{8x\cdot\left(x^2+12\right)}{\left(x^2-4\right)^3};$$

$y''=0$ при $x=0$; при $x=\pm 2$ y'' не существует.

Найденные точки разбивают область определения функции на интервалы выпуклости и вогнутости. Определим знак второй производной и в зависимости от него поведение функции. Результаты исследования представим в виде таблицы (в силу нечетности функции достаточно рассмотреть только область при $x\ge 0$).

x	0	$(0;2)$	2	$(2;+\infty)$
y''	0	$-$	$\nexists$	$+$
y	0 перегиб	$\cap$	$\nexists$	$\cup$

Точка $x=0$ является точкой перегиба, т.к. при переходе через нее вторая производная меняет знак, точка $x=2$ не является точкой перегиба, т.к. она не входит в область определения функции.

7. Находим точки пересечения графика с осями координат.

Точка пересечения графика с осью Oy была найдена при исследовании функции на экстремум.

Для определения точек пересечения с осью Ox решаем уравнение: $y=0$, т. е. $\dfrac{x^3}{x^2-4}=0$. Единственное решение уравнения: $x=0$. Значит, график пересекает оси координат только в начальной точке (0, 0).

Используя полученные данные, строим график функции при $x\ge 0$, затем отражаем его симметрично относительно начала координат (рис. 5).

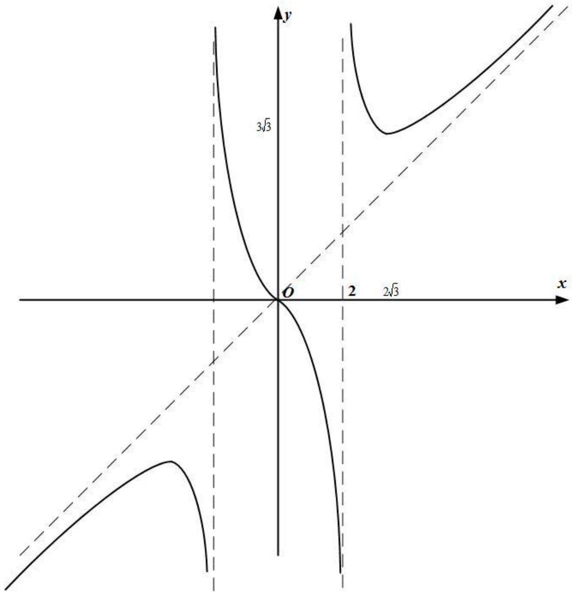

Рисунок 5. График функции $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

Исследуем вторую функцию.

1. Область определения функции $D(x) = \mathbb{R}^+$ или $D(x) = (0; +\infty)$,т.к. логарифм и подкоренное выражение, стоящее в знаменателе, существуют только при положительных значениях аргумента.

2. Функция не является четной или нечетной (следует из области определения), т.е. имеем функцию общего вида.

3. Функция не является периодической, т.к. является отношением двух элементарных не периодических функций.

4. Находим асимптоты.

Из области определения имеем точку разрыва $x = 0$, причем $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left[\dfrac{+\infty}{+0} = +(\infty \cdot \infty) \right] = +\infty$, следовательно, $x = 0$ является вертикальной асимптотой графика функции.

Ищем невертикальную (правостороннюю) асимптоту только при $x \to +\infty$:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{3/2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=/\text{используем правило Лопиталя}/=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}x^{1/2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3x^{3/2}}=0;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(y-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=/\text{используем правило Лопиталя}/=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0;$$

Получаем уравнение правосторонней горизонтальной асимптоты (т.к. угловой коэффициент $k=0$ при $x\to+\infty$): $y=0$.

5. Находим экстремумы функции и интервалы возрастания и убывания:

$$y'=\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-\ln x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2-\ln x}{2\sqrt{x}\cdot x}=\frac{2-\ln x}{2x^{3/2}};$$

$y'=0$ при $x=e^2$, y' существует только при $x>0$.

Определим интервалы монотонности и экстремум функции с помощью таблицы:

x	$(0;e^2)$	e^2	$(e^2;+\infty)$
y'	+	0	–
y	↗	$2/e$ max	↘

6. Находим интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба:

$$y''=\left(\frac{2-\ln x}{2x^{3/2}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2-\ln x}{x^{3/2}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^{3/2}-\left(2-\ln x\right)\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{1/2}}{x^3}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{-x^{1/2}-\left(2-\ln x\right)\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{1/2}}{x^3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{-x^{1/2}}{2}\left(2+\left(2-\ln x\right)\cdot 3\right)}{x^3}=-\frac{\left(2+6-3\ln x\right)}{4x^{5/2}}=\frac{3\ln x-8}{4x^{5/2}};$$

$y'' = 0$ при $x = e^{8/3}$; y'' существует только при $x > 0$.

Определим интервалы выпуклости и вогнутости графика функции, а также точку перегиба с помощью таблицы:

x	$(0; e^{8/3})$	$e^{8/3}$	$(e^{8/3}; +\infty)$
y''	$-$	0	$+$
y	$\cap$	$8/\left(3e^{4/3}\right)$ перегиб	$\cup$

7. Находим точки пересечения графика с осями координат:

График не пересекает ось Oy, т.к. точка $x = 0$ не принадлежит области определения функции (ось Oy является вертикальной асимптотой).

Находим пересечение с осью Ox: $y = 0$, т.е. $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$. Единственное решение уравнения: $x = 1$. Получаем точку пересечения $(1;0)$.

По результатам исследования строим график функции (рис. 6).

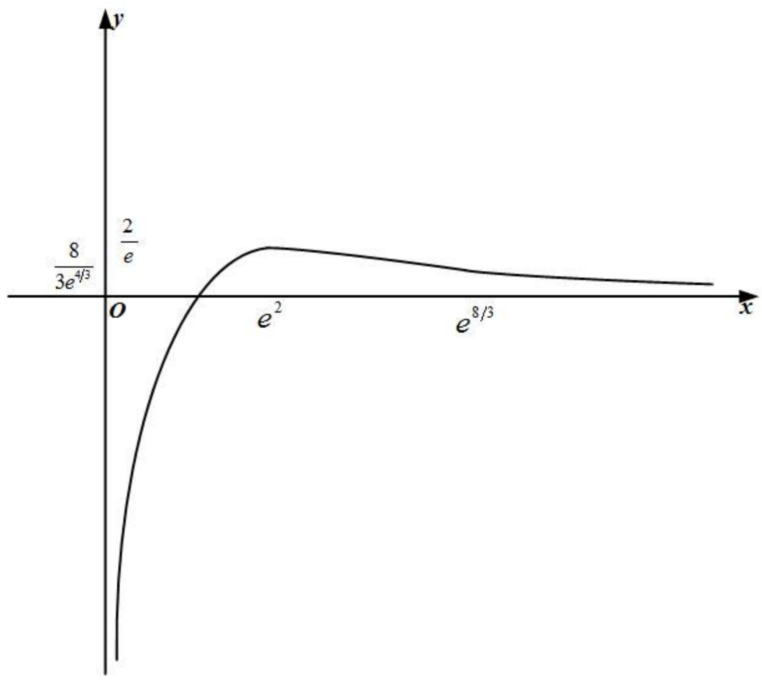

Рисунок 6 График функции $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Задание 4.1.

Найти экстремум функции двух переменных $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ или доказать, что его не существует.

Решение.

Воспользуемся необходимыми условиями экстремума:

$$z'_x\big|_{M_0} = 0, \quad z'_y\big|_{M_0} = 0.$$

Для этого найдем частные производные первого порядка:

$$z'_x = \left(x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y\right)'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15,$$

$$z'_y = \left(x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y\right)'_y = 6xy - 12.$$

Приравняем их к нулю, получим систему: $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ 6xy - 12 = 0. \end{cases}$

Решая систему, найдем четыре стационарные точки:

$$M_1(2,1),\ M_2(1,2),\ M_3(-2,-1),\ M_4(-1,-2).$$

Проверим каждую из них на экстремум с помощью достаточного признака.

Найдем частные производные второго порядка:

$$z''_{x^2} = \left(3x^2 + 3y^2 - 15\right)'_x = 6x,$$

$$z''_{xy} = \left(3x^2 + 3y^2 - 15\right)'_y = 6y,$$

$$z''_{y^2} = \left(6xy - 12\right)'_y = 6x.$$

Исследуем стационарную точку $M_1(2,1)$:

$$A = z''_{x^2}\Big|_{M_1} = 12,\ B = z''_{xy}\Big|_{M_1} = 6,\ C = z''_{y^2}\Big|_{M_1} = 12,$$

$$\Delta = AC - B^2 = 144 - 36 > 0 \ \text{ и } \ A = 12 > 0.$$

Следовательно, точка $M_1(2,1)$ является точкой минимума:

$$z_{min} = \left(x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y\right)\Big|_{M_1} = -28.$$

Исследуем характер точки $M_2(1,2)$:

$$A = z''_{x^2}\Big|_{M_2} = 6,\ B = z''_{xy}\Big|_{M_2} = 12,\ C = z''_{y^2}\Big|_{M_2} = 6,$$

$$\Delta = AC - B^2 = 36 - 144 < 0.$$

Следовательно, в точке $M_2(1,2)$ функция экстремума не имеет.

Исследуем стационарную точку $M_3(-2,-1)$:

$$A = z''_{x^2}\Big|_{M_3} = -12,\ B = z''_{xy}\Big|_{M_3} = -6,\ C = z''_{y^2}\Big|_{M_3} = -12,$$

$$\Delta = AC - B^2 = 144 - 36 > 0 \ \text{ и } \ A = -12 < 0.$$

Следовательно, точка $M_3(-2,-1)$ является точкой максимума:

$$z_{max} = \left(x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y\right)\Big|_{M_3} = 28.$$

Исследуем стационарную точку $M_4(-1,-2)$:

$$A = z''_{x^2}\Big|_{M_4} = -6,\ B = z''_{xy}\Big|_{M_4} = -12,\ C = z''_{y^2}\Big|_{M_4} = -6,$$

$$\Delta = AC - B^2 = 36 - 144 < 0\ .$$

Следовательно, в точке $M_4(-1,-2)$ функция экстремума не имеет.

Ответ. $M_1(2,1)$ является точкой локального минимума, $M_3(-2,-1)$ является точкой локального максимума, в точках $M_2(1,2)$ и $M_4(-1,-2)$ функция экстремума не имеет.

Задание 4.2.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 + 2xy - 4y + 1$ в замкнутой области *D*, ограниченной прямой $y = -4$ и параболой $(x-2)^2 = -y$.

Решение.

Построим область D (рис. 7).

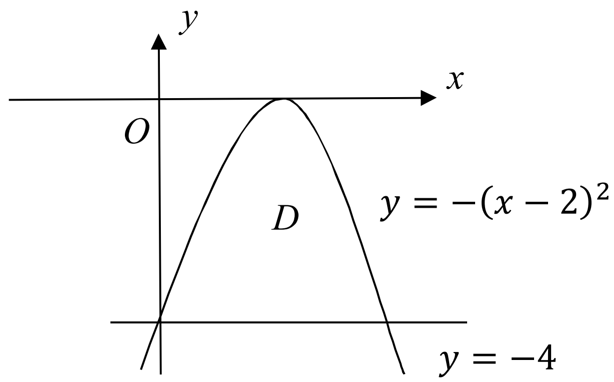

Рисунок 7. Область *D*

Функция принимает свои наибольшее и наименьшее значение либо во внутренних стационарных точках, либо на границе области.

Найдем все внутренние стационарные точки. Для этого решим систему:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0, \\ 2x - 4 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы дает координаты первой стационарной точки: $M_1(2,-2) \in D$.

Найдем все стационарные точки на границе Γ_D области D. Граница Γ_D составлена из отрезка прямой $y = -4$ и части параболы $(x-2)^2 = -y$ при $0 \le x \le 4$. Исследуем поведение функции на каждом участке.

Отрезок AB: $y = -4$, $x \in [0,4]$. Значение функции на отрезке:

$$z\big|_{y=-4} = \left(x^2 + 2xy - 4y + 1\right)\Big|_{y=-4} = x^2 - 8x + 17.$$

Исследуем на экстремум:

$$\left(x^2 - 8x + 17\right)' = 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4.$$

Получим вторую стационарную точку $M_2(4,-4) \in \Gamma_D$. Она совпала с границами области.

Кривая AB: $y = -(x-2)^2$, $x \in [0,4]$. Значение функции на отрезке:

$$z\big|_{y=-(x-2)^2}=\left(x^2+2xy-4y+1\right)\Big|_{y=-(x-2)^2}=$$

$$=x^2-2x(x-2)^2-4(x-2)^2+1=3x^2+8x-15.$$

Исследуем на экстремум:

$$\left(3x^2+8x-15\right)'=6x+8=0 \quad\Rightarrow\quad x=-\frac{4}{3}.$$

Получили точку $M_3\left(-\frac{4}{3},-\frac{100}{9}\right)$, не принадлежащую области D (она не удовлетворяет условию $0\le x\le 4$).

Вычислим значения функции во всех найденных точках:

-стационарной точке внутри области $M_1(2,-2)$;

-стационарной точке на границе области $M_2(4,-4)$ (в M_3 не вычисляем),

- граничных точках области $A(0,-4)$, $B(4,-4)$.

$$z\big|_{M_1}=5,\ \ z\big|_{M_2=B}=1\ ,\ z\big|_{A}=17\ .$$

Выберем наибольшее и наименьшее значения:

$$\underset{D}{\text{absmax}}\,z=17,\ \ \underset{D}{\text{absmin}}\,z=1.$$

Ответ. $\underset{D}{\text{absmax}}\,z=17,\ \ \underset{D}{\text{absmin}}\,z=1.$

Контрольные задания

Задание 1.1.

Решить матричное уравнение.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$

5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$

6. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ 13 & -7 & -4 \end{pmatrix}.$

7. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$

8. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 6 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

9. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -5 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

10. $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$

Задание 1.2.

Решить системы линейных уравнений:

а) методом Крамера;

б) методом Гаусса (если система имеет бесконечное множество решений, то найти общее решение через свободную переменную z и частное решение при $z = 1$).

1. а. $\begin{cases} x + y + 2z = -1; \\ 5x + 2y + 3z = 3; \\ 2x - y + 2z = -4. \end{cases}$ б. $\begin{cases} x - 4y - 3z = -7; \\ x - 3y - 2z = -4; \\ 2x - y + z = 7. \end{cases}$

2. а. $\begin{cases} 3x+3y+z=3; \\ x+5y+2z=0; \\ -2x+3y-z=4. \end{cases}$ б. $\begin{cases} x+2y+5z=6; \\ x+y+3z=1; \\ 2x+y+4z=-3. \end{cases}$

3. а. $\begin{cases} 2x-2y+3z=3; \\ x-3y+2z=-2; \\ 2x+y+z=7. \end{cases}$ б. $\begin{cases} x-y-2z=3; \\ 2x-y-z=8; \\ x+y+4z=7. \end{cases}$

4. а. $\begin{cases} 3x+y+z=10; \\ 2x+2y+z=7; \\ x+y-2z=1. \end{cases}$ б. $\begin{cases} x+3y-2z=6; \\ x+y+2z=4; \\ 2x+5y-2z=11. \end{cases}$

5. а. $\begin{cases} 3x+4y-2z=5; \\ 2x-7y+5z=0; \\ 2x-y-z=0. \end{cases}$ б. $\begin{cases} x+4y+2z=-3; \\ x+3y+3z=-1; \\ 2x+7y+5z=-4. \end{cases}$

6. а. $\begin{cases} x+2y+z=2; \\ x+2y+4z=-4; \\ 5x+2y-z=6. \end{cases}$ б. $\begin{cases} x-3y+4z=-5; \\ x-2y+3z=-2; \\ 2x-3y+5z=-1. \end{cases}$

7. а. $\begin{cases} -2x+2y+z=2; \\ 3x-y+z=4; \\ 3x-6y-2z=-7. \end{cases}$ б. $\begin{cases} x+2y+z=3; \\ x+3y+2z=4; \\ 2x+3y+z=5. \end{cases}$

8. а. $\begin{cases} x+2y-z=2; \\ 2x-3y+2z=2; \\ 3x+y+z=8. \end{cases}$ б. $\begin{cases} x-3y+2z=-6; \\ x-2y+z=-3; \\ 2x-5y+3z=-9. \end{cases}$

9. а. $\begin{cases} x+3y-6z=12; \\ 3x+2y+5z=-10; \\ 2x+5y-3z=6. \end{cases}$ б. $\begin{cases} x-y+2z=2; \\ 3x-y+10z=8; \\ x-3y-2z=0. \end{cases}$

10. а. $\begin{cases} 2x+4y+z=4; \\ 3x+6y+2z=4; \\ 4x-y-3z=1. \end{cases}$ б. $\begin{cases} x+y+3z=1; \\ -x+3y+z=7; \\ 3x-y+5z=-5. \end{cases}$

Задание 2.1.

Даны координаты трех точек.

а) Найти уравнение прямой *AH*, перпендикулярной прямой *BC* в общем, каноническом и параметрическом виде.

б) Определить взаимное расположение векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BC}$, где *O* – середина *BC*.

1. *A* (2, –4), *B* (6, 3), *C* (4, –5).
2. *A* (3, 1), *B* (2, –2), *C* (8, 4).
3. *A* (4, 7), *B* (10, 2), *C* (–4, 6).
4. *A* (8, –8), *B* (3, 4), *C* (–5, 2).
5. *A* (6, 3), *B* (2, –6), *C* (8, 4).
6. *A* (7, 3), *B* (–4, –3), *C* (6, 3).
7. *A* (2, –5), *B* (7, –2), *C* (9, –6).
8. *A* (11, 2), *B* (4, 5), *C* (–2, 9).
9. *A* (–3, 4), *B* (8, –8), *C* (4, –10).
10. *A* (5, –3), *B* (7, 2), *C* (9, 8).

Задание 2.2.

Привести уравнения второго порядка к каноническому виду. Определить тип кривой, которое оно задает. Построить кривую.

1. а) $x^2-2x-16y-4y^2=19$; б) $x=-2+3\sqrt{7-y}$.
2. а) $9x^2+36x+y^2+27=0$; б) $y=1-\sqrt{2x+4}$.
3. а) $x^2+6x-14y+y^2+49=0$; б) $x=3-\sqrt{2y}$.
4. а) $x^2+16y^2-96y+128=0$; б) $y=5-\sqrt{3-2x}$.
5. а) $4y^2+8y-x^2+2x=1$; б) $x=-1-\sqrt{3-y}$.
6. а) $x^2+6x-3y^2+18y=21$; б) $y=\sqrt{x-2}-4$.
7. а) $x^2-10x+y^2-2y=10$; б) $x-2\sqrt{y}+1=0$.
8. а) $x^2+12x+y^2-10y+60=0$; б) $\sqrt{y+4}=4x-6$.
9. а) $x^2-8x+5y^2-10y+20=0$; б) $3-2\sqrt{2-x}=y$.
10. а) $3y^2-12y-2x^2-8x+3=0$; б) $x=-2+\sqrt{1-3y}$.

Задание 2.3.

Даны координаты четырех точек.

а) Написать уравнение плоскости *ABC*;

б) Найти площадь треугольника *ABC*;

в) Найти двумя способами длину высоты, опущенной из вершины *D* тетраэдра *ABCD* на грань *ABC* (используя формулы векторной алгебры и формулу расстояния от точки до прямой).

1. *A* (4, –1, 3), *B* (1, 0, –1), *C* (2, 1, 1), *D* (–1, 5, 4)
2. *A* (2, –1, 3), *B* (4, 7, –3), *C* (–1, 2, 0), *D* (3, 1, –1)
3. *A* (0, 1, –1), *B* (4, 2, 1), *C* (–1, –3, –2), *D* (1, 2, –3)
4. *A* (2, 1, –1), *B* (4, 2, 3), *C* (1, 0, –1), *D* (2, 1, –4)
5. *A* (0, 3, –3), *B* (2, 1, –4), *C* (–1, –3, 2), *D* (2, 1, 3)
6. *A* (3, –1, 4), *B* (1, 0, 3), *C* (–2, –1, 3), *D* (4, 1, 1)
7. *A* (4, 0, 2), *B* (7, 1, –1), *C* (2, 3, 4), *D* (–1, –3, –4)
8. *A* (2, 3, –1), *B* (4, 3, 1), *C* (0, 2, –1), *D* (3, 5, –3)
9. *A* (4, 3, 1), *B* (0, 1, 2), *C* (–1, 0, 3), *D* (–3, 2, 4)
10. *A* (5, 3, 2), *B* (–1, 3, 4), *C* (0, 2, –1), *D* (3, 5, –2)

Задание 3.1.

Вычислить пределы:

а) отношение степенных функций;

б) использование первого замечательного предела или использование эквивалентных функций;

в) использование второго замечательного предела.

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+2x-5}{3x^3-2x^2+3x-7}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{(2-x)\cdot x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-2x-2}{x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{x\cdot\sin(2x-\pi)}{(\pi/2-x)^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{2x+3}\right)^{x}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(12-4x)}{x\cdot\arcsin(x-3)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3\cdot x)^{1/x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-3x+1}{x^5-9x^3+x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}(3x)\cdot\sin(2x)}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{2x-1}\right)^{x}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-4x^2+x-4}{x^2-4x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{\sin(3x-1)}{\mathrm{arctg}(9x-3)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(5x+1)^{-1/x}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\cdot\mathrm{tg}\,7x}{\sin 5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7-x}{x}\right)^{3x}$.

7.а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\mathrm{arctg}(x-\pi)}{x\cdot\sin(x-\pi)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{3/x}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5}{\sqrt{9x^4+3}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\left(x^2+4x\right)}{x^2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+2}\right)^{\frac{x+1}{2}}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^3-7x^2+2x-14}{x^2-49}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{ctg}(5x)\cdot\mathrm{tg}(2x)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{2/x}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}(3x+\pi/3)\cdot\sin(2x)}{\arcsin x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{1-2x}$.

Задание 3.2.

Найти производные функций:

а) элементарной функции;

б) показательно-степенной функции.

1. а) $y=(x^2+2)\cdot e^{-x}+\ln\dfrac{x^2}{1-x^2}+\pi$; б) $y=x^{\sqrt{x}}$.

2. а) $y=\dfrac{x}{2}\cdot\cos(5-2x)+\dfrac{\sqrt[3]{x^4-2}}{x}+\sqrt{e}$; б) $y=(\cos x)^x$.

3. а) $y=2x\cdot\arcsin\sqrt{x}+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{1}{e}$; б) $y=(\ln x)^{\ln x}$.

4. а) $y=\ln(3\sqrt{9x^4+1})+\dfrac{\sin x}{\cos x-1}+\pi^2$; б) $y=x^{\arcsin x}$.

5. а) $y=\mathrm{arctg}\dfrac{x}{1-x}+e^{\frac{x}{2}}\cdot(x^2-4x+8)-3\ln 2$; б) $y=\left(x-e^3\right)^{\sqrt{x}}$.

6. а) $y=x\cdot arctg\,x-\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x^2}{x}\right)-\sqrt{\pi}$; б) $y=(2x-1)^{1/(1-2x)}$.

7. а) $y=\mathrm{ctg}\dfrac{x}{1-3x}-e^{\sqrt{x^3-4}}\cdot x+2^4$; б) $y=(\sin x)^{\arcsin x}$.

8. а) $y=\dfrac{2}{3}x\cdot\sqrt{(1+\ln x)^3}+\dfrac{\cos(1-2x)}{1-\cos(2x)}+e^3$; б) $y=x^{1/x}$.

9. а) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}+(x+2)\cdot e^{-x^2}-\dfrac{1}{\pi}$; б) $y=x^{\sin x}$.

10. а) $y=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}+x\cdot\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)-2^e$; б) $y=x^{e^x}$.

Задание 3.3.

Вычислить предел, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\cos^2(2x)}{(\pi/4-x)^2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x-\sin x}{x^3}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}(2x)\cdot\operatorname{tg}(4x)$.

4. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin x}{(\pi/2-x)^2}$.

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(e^x-e-\ln x\right)}{x^2-1}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}x\cdot x$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(4x)}{x\cdot\cos x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0+0}\operatorname{tg}x\cdot\ln x$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}-x}{x-\sin x}$.

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln^2 x}$.

Задание 3.4.

Провести полное исследование функции с помощью производных первого и второго порядков. По результатам исследования строить графики функций: а) дробно-рациональная функция;

б) показательная, логарифмическая или иррациональная.

1. а) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; б) $y=x-\sqrt{x+2}$.

2. а) $y=\dfrac{x}{1-x^2}$; б) $y=x\cdot e^{-x}$.

3. а) $y=\dfrac{4x}{x^2+1}$; б) $y=x\cdot\sqrt{1-x}$.

4. а) $y = \dfrac{8}{4 - x^2}$; б) $y = \ln(1 - x^2)$.

5. а) $y = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$; б) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

6. а) $y = \dfrac{x^2}{2x+1}$; б) $y = \ln(1 - x^2)$.

7. а) $y = \dfrac{2x-1}{x^2+2}$; б) $y = -x \cdot \sqrt{1+x}$.

8. а) $y = \dfrac{3x-2}{x^2}$; б) $y = (x-1) \cdot e^x$.

9. а) $y = \dfrac{x^3-8}{x}$; б) $y = x \cdot \sqrt[3]{x+1}$.

10. а) $y = \dfrac{x^2}{3-x}$; б) $y = \sqrt{1+e^x}$.

Задание 4.1.

Найти экстремум функции двух переменных или доказать, что его не существует.

1. $z = xy(4x - x^2 - xy)$.
2. $z = x^3 + 8y^3 - 2xy + 3$.
3. $z = 2x^2 + 4y^2 - x + 2y - 1$.
4. $z = x^3 - y^2 - 12x + 4y - 2$.
5. $z = 2x^2 + 5y^2 - 6xy - 2x + 4y + 1$.
6. $z = x^2 - 3y^2 + 3xy - 5$.
7. $z = 8x + 10y - x^2 - xy - y^2$.
8. $z = 6xy - 4x^3 - 2y^2 + 1$.
9. $z = 2y^3 - 3xy^2 + 6xy - 12y$.
10. $z = 4x^2 + y^2 - 24x + 2y + 17$.

Задание 4.2.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции в указанной области D.

1. $z = 2x^2 - 4xy - x + 2y - 4$; $D: 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 1$.

2. $z = x^2 + 2y^2 + 2xy - y + x;$ $D: -2 \le x \le 0, 0 \le y \le 1.$

3. $z = x^2 + xy - 1;$ $D: 2x^2 - 8 \le y \le 0.$

4. $z = -y^2 + 2xy + 10;$ $D: 0 \le x \le 4 - y^2.$

5. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 1;$ $D: 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 0.$

6. $z = 4x^2 + y^2 + 2xy - 2y;$ $D: -1 \le x \le 0, -1 \le y \le 0.$

7. $z = x^2 - 6xy + 1;$ $D: x \le 0, y \le 0, x + y + 1 \ge 0.$

8. $z = x^2 + y^2 + xy - 6y - 3x;$ $D: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 3.$

9. $z = x^2 + xy - 4;$ $D: 4x^2 - 4 \le y \le 0.$

10. $z = 5x^2 + y^2 - 3xy + 2;$ $D: x \ge -1, y \ge -1, x + y \le 1.$

Литература

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н.Берман. М.: Наука, 2002. 443 с.

2. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н.Бронштейн, К.А.Семендяев. М.: Наука, 1980. 946 с.

3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова. М.: Высшая школа, 1997. Ч. 1, 2. 304 с.

4. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики / Б.П.Демидович. М.: Изд-во «Астрель», 2003. 654 с.

5. раснов М.Л. Вся высшая математика / М.Л.Краснов, А.И.Киселев, Г.И.Макаренко. М.: Эдиториал УРСС, 2001. Ч. 1. 352 с.

6. Линейная алгебра и основы математического анализа: сб. задач по математике для втузов / под ред. А.В.Ефимова и Б.П.Демидовича. М.: Наука, 1996. 464 с.

7. Минькова Р.М. Векторная алгебра и аналитическая геометрия / Р.М.Минькова. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2005. 41 с.

8. Минькова Р.М. Дифференциальное исчисление функции одной переменной / Р.М.Минькова. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2005. 57 с.

9. Минькова Р.М. Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных / Р.М.Минькова. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2005. 70 с.

10. Минькова Р.М. Элементы линейной алгебры / Р.М.Минькова. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2005. 46 с.

11. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики / И.П.Натансон. СПб.: Изд-во «Лань», 2003. 736 с.

12. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике / Д.Т.Письменный. М.: Айрис-пресс, 2003. Ч. 1, 2. 288 с.

Приложение

Образец титульного листа

ФГАОУ ВО «Уральский Федеральный Университет
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»
Институт радиоэлектроники и информационных технологий – РТФ

Кафедра Вычислительных методов и уравнений математической физики

Контрольная работа № 1
по математике

Вариант № 0

студент Иванов И.И.

институт ИРИТ-РтФ

группа РИЗ-160000

зачетная книжка № 00000000

1.1	1.2.		2.1.		2.2.		2.3.		
	а	б	а	б	а	б	а	б	в

3.1.			3.2.		3.3.	3.4.		4.1.	4.2.
а	б	в	а	б		а	б		

Екатеринбург
2016