ФГАОУ ВО «Уральский Федеральный Университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»
Институт радиоэлектроники и информационных технологий – РТФ
Кафедра Вычислительных методов и уравнений математической физики

Математика:
векторный анализ

Программа, методические указания и контрольные задания I семестра
для студентов заочной формы обучения
института радиоэлектроники и информационных технологий – РТФ

Екатеринбург
2016

Оглавление

Введение

В настоящих методических указаниях приведена программа, контрольные задания по дисциплине «Векторный анализ» за I семестр для студентов Института радиоэлектроники и информационных технологий – РТФ заочной формы обучения. Указаны требования к оформлению контрольной работы и представлено решение нулевого варианта.

В межсессионный период по субботам один раз в месяц для студентов заочного обучения проводятся консультации по контрольным работам. Информация о датах и времени их проведения вывешивается на кафедральном стенде возле ауд. Р-336.

Во время экзаменационной сессии организуются обзорные лекции и практические занятия по программе текущего семестра, а также установочные лекции по программе следующего семестра.

Во время сдачи зачета или экзамена студент должен продемонстрировать знание и понимание основных теоретических и практических вопросов программы, уметь применять их при решении задач. При работе с определениями, теоремами и правилами студент должен уметь приводить их точную формулировку, как устную, так и письменную (использовать символьную запись), приводить примеры для их иллюстрации.

Программа

Программа по векторному анализу за первый семестр включает 3 темы.

Полярная система координат

1. Понятия «полюс», «полярная ось». Полярные координаты точки. Построение линий в полярной системе координат.
2. Формулы перехода от декартовых координат к полярным координатам и наоборот.
3. Полярное уравнение прямой. Полярное уравнение эллипса, гиперболы и параболы.

Комплексные числа

1. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная форма записи комплексного числа. Построение на комплексной плоскости.
2. Операции над комплексными числами в различных формах: сложение, вычитание, деление, возведение в степень, извлечение корня.

Линейные пространства (основные понятия)

1. Определение линейного пространства, подпространства. Критерий подпространства. Примеры линейных пространств.
2. Линейно зависимые и линейно независимые системы элементов (векторов) линейного пространства.
3. Понятие базиса и размерности линейного пространства. Координаты элемента (вектора) линейного пространства в данном базисе.
4. Матрица перехода от одного базиса к другому; связь координат элемента (вектора) линейного пространства в различных базисах.

Требования к оформлению контрольной работы

В процессе изучения дисциплины «Векторный анализ» студент должен выполнить в каждом семестре одну контрольную работу. Контрольная работа № 1 состоит из 3 заданий (6 задач). Каждая задача представлена в 10 вариантах. Студент решает одну из десяти однотипных задач в соответствии со своим вариантом. Номер варианта определяется по последней цифре номера студенческого билета или зачетной книжки (если последняя цифра 0, то необходимо решить задачи 10 варианта).

При выполнении контрольных работ нужно придерживаться следующих правил.

1. Каждую контрольную работу следует выполнять в отдельной тонкой тетради в клетку (12 листов), оставляя поля для замечаний рецензента.

2. На обложке тетради необходимо указать: а) свою фамилию и инициалы; б) институт; в) номер группы; г) номер зачетной книжки; д) номер контрольной работы; е) название дисциплины (см. приложение).

Помимо общих данных на титульном листе печатается матрица учета задач.

1		2		3	
а	б	а	б	а	б

Отметку о правильном выполнении задачи (+) ставит преподаватель.

3. В контрольную работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, и в строгом соответствии с номером своего варианта.

4. Решения задач в каждой контрольной работе следует располагать обязательно в порядке номеров, указанных в задании (см. матрицу учета задач).

5. Оформление решения каждой задачи должно обязательно включать в себя запись условия задачи в начале и ответ (отдельно выделенной строкой) в конце.

6. Решения задач должны содержать подробные пояснения и необходимые рисунки. Все решения и рисунки выполняются от руки. Использование онлайн-калькуляторов разрешается только для проверки правильности Вашего решения. В случае прямого копирования работы онлайн-калькулятора решение задачи не засчитывается.

7. После получения прорецензированной работы студент должен исправить все отмеченные рецензентом замечания и недочеты, а также выполнить все его рекомендации. Исправления нужно записывать в этой же тетради после всех решенных задач контрольной работы. Вносить исправления в тексты решения задач после рецензирования запрещается.

Не зачтенную контрольную работу с последующими соответствующими исправлениями следует направить на повторную рецензию.

8. Контрольная работа в каждом семестре должна быть представлена для рецензирования не позднее, чем за **2 недели** до начала экзаменационной сессии. Рецензирование контрольных работ, присланных позже указанного срока, переносится на начало следующего семестра.

Контрольная работа считается зачтенной при наличии всех правильно выполненных задач (на титульном листе ставится соответствующая отметка).

Прорецензированную и зачтенную контрольную работу студент должен предъявлять экзаменатору перед сдачей зачета или экзамена.

Решение нулевого варианта

Контрольная работа № 1

Задание 1.

Построить линии в полярной системе координат.

а) $\rho = \dfrac{4}{\cos\varphi}$; б) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 4x^2 y$.

Решение.

а) Укажем ограничения для полярного угла: так как $\rho > 0$, то $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. Вычисляем координаты точек построения:

φ	0	$\pm\pi/6$	$\pm\pi/4$	$\pm\pi/3$
ρ	4	$8/\sqrt{3}$	$4\sqrt{2}$	8

Видим, что при $\varphi \to \pm\pi/2$ радиус $\rho \to +\infty$.

Строим найденный точки в полярной системе координат[1], соединяем их и получаем график:

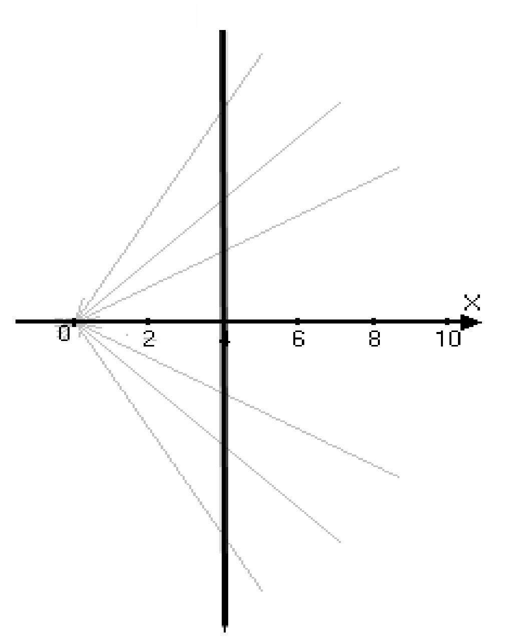

Рисунок 1

[1] Для построения точки в полярной системе координат вначале проводят луч под углом φ к полярной оси Ox, затем на построенном луче откладывают от полюса O отрезок длиной ρ.

Этот же график можно построить с помощью перехода в декартову систему координат: так как $\rho\cos\varphi = x$, получаем уравнение $x = 4$ (график прямой проходит через точку $(4;0)$ параллельно оси Oy).

б) Используем формулы связи: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, тогда $x^2 + y^2 = \rho^2$. Подставляем в уравнение и получаем $\rho^4 = 4\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi$ или $\rho = 4\cos^2\varphi\sin\varphi$. Так как $\rho \geq 0$, то возникают ограничения для полярного угла: $0 \leq \varphi \leq \pi$. Вычисляем координаты точек построения:

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
ρ	0	$3/2$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}$	$3/2$	0

Строим график:

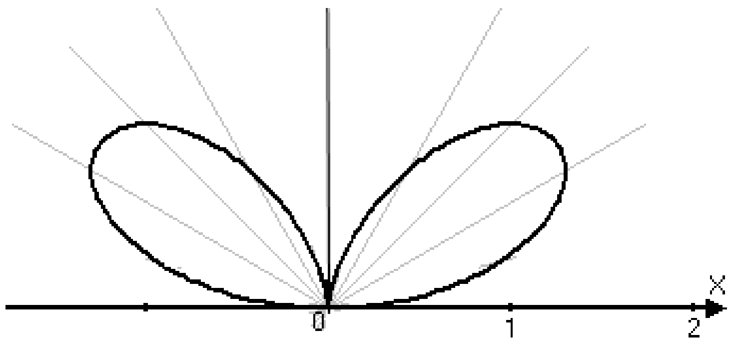

Рисунок 2

Задание 2.

Дано комплексное число $a = \dfrac{1+i}{1-i}$. Требуется:

а) записать число a в алгебраической, тригонометрической и показательной формах;

б) найти все корни уравнения $2z^3 = a^2$ и изобразить их на комплексной плоскости.

Решение.

а) Выполним деление. При делении на комплексное число вида $x + yi$ нужно числитель и знаменатель дроби умножить на комплексно сопряженное число $x-yi$; при этом $(x+yi)(x-yi)=x^2-(yi)^2=x^2+y^2$ (т. к. $i^2=-1$). Итак, $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{1+(-1)^2}=\frac{1+2i-i^2}{2}=\frac{1+2i-1}{2}=i.$

Получили алгебраическую форму: $a=i=0+i.$

Определим модуль и аргумент комплексного числа а для получения двух оставшихся форм записи.

Модуль $\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{0+1}=1,$ аргумент $\varphi=\frac{\pi}{2}.$[2]

Тогда, $a=\rho\cdot\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ – тригонометрическая форма записи;

$a=\rho\cdot e^{i\varphi}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ – показательная форма.

Ответ. Алгебраическая форма: $a=i;$

тригонометрическая форма: $a==\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2};$

показательная форма: $a=e^{i\frac{\pi}{2}}.$

б) Выразим из уравнения неизвестную $z: z=\sqrt[3]{\frac{a^2}{2}}.$ Упрощаем подкоренное выражение $\frac{a^2}{2}=\frac{i^2}{2}=-\frac{1}{2}.$ Тогда $z=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}.$

Корень n-ой степени из комплексного числа имеет n различных значений, которые можно найти по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ \text{где}\ k=0,1,...,n-1.$$

---

[2]Аргумент комплексного числа $z=x+yi$ определяют по формулам

$$\varphi=\begin{cases}\operatorname{arctg}\left(y/x\right),\ x>0,\\ \pi+\operatorname{arctg}\left(y/x\right),\ x<0,y>0,\\ -\pi+\operatorname{arctg}\left(y/x\right),\ x<0,y\le 0,\\ \pi/2,\ x=0,y>0,\\ -\pi/2,\ x=0,y<0,\end{cases}\ \text{при этом}\ \varphi\in(-\pi;\pi].$$

Сначала находим тригонометрическую форму числа, стоящего под корнем: $\rho = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{1}{2}$; $\varphi = -\pi + arctg 0 = -\pi$ (т.к. $x < 0,\ y = 0$);

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right).$$

Извлекаем корень: $z = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right)$, где $k = 0, 1, 2.$ Получаем три значения:

$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right), \text{ при } k = 0;$$

$$z_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right), \text{ при } k = 1;$$

$$z_3 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right), \text{ при } k = 2.$$ [3]

Полученные комплексные числа z_1, z_2, z_3 расположены на окружности радиуса $\sqrt[3]{1/2}$ и делят ее на 3 равные части (эти точки образуют правильный треугольник). Отмечаем их на комплексной плоскости:

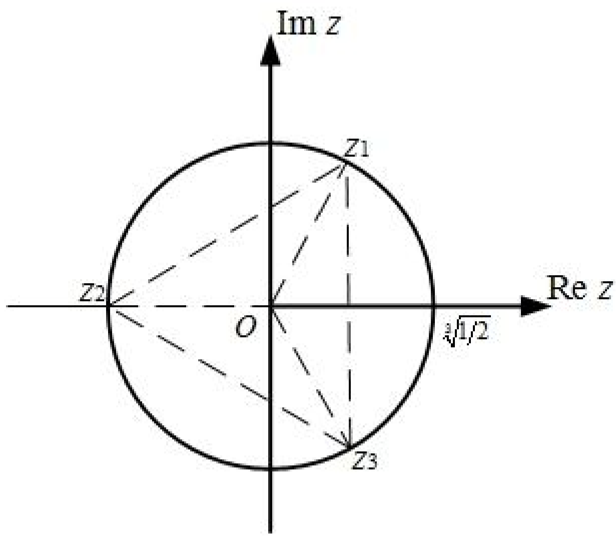

Рисунок 3

[3] Используем свойство периодичности тригонометрических функций и уменьшаем аргумент на 2π, чтобы полученное значение находилось в промежутке $(-\pi;\ \pi]$.

Ответ. $z_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; $z_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}(\cos\pi + i\sin\pi)$;

$z_3 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)$.

Задание 3.

Даны векторы $\vec{a}_1 = \{2, -4, 3\}$, $\vec{a}_2 = \{0, 2, 1\}$, $\vec{a}_3 = \{4, 3, 5\}$, $\vec{b} = \{1, 1, 3\}$. Требуется:

а) доказать, что векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ образуют базис;

б) найти координаты $\vec{b}$ в базисе $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

Решение.

а) Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ образуют базис пространства R_3, если они линейно независимые. Для проверки линейной зависимости вычисляем определитель, составленный из координат этих векторов (координаты векторов записываем в столбцах определителя):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 0 + 4 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (10 - 3) + 4 \cdot (-4 - 6) = -26.$$

Определитель отличен от нуля, следовательно, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ линейно независимые и образуют базис.

б) Координаты вектора $\vec{b}$ в базисе $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ – это коэффициенты в разложении вектора $\vec{b}$ по векторам базиса:

$\vec{b} = \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{a}_3$.

Для нахождения коэффициентов α_1, α_2, α_3 составим систему[4]:

[4] Коэффициенты при неизвестных α_1, α_2, α_3 - соответствующие координаты векторов базиса $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, свободные коэффициенты – координаты вектора $\vec{b}$.

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 4\alpha_3 = 1, \\ -4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 1, \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 = 3. \end{cases}$$

Решаем систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 11 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 11 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right) \overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & 13 & 0 \end{array}\right) \overset{4}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{6}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 & 1,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

В ходе решения были выполнены следующие преобразования

1) умножили первую строку на 2 и прибавили к четвертой строке, умножили третью строку на (−1) и прибавили к первой;

2) умножили первую строку на 3 и прибавили к третьей строке, элементы первой строки умножили на (−1);

3) прибавили вторую строку к третьей;

4) сократили вторую строку на 13;

5) умножили третью строку на (−1) и прибавили к первой, затем умножили на (−11) и прибавили ко второй строке;

6) умножили вторую строку на (−1/2) и прибавили к первой строке, затем сократили вторую строку на 2.

Следовательно, $\alpha_1 = 0,5;\ \alpha_2 = 1,5;\ \alpha_3 = 0$ и $\vec{b} = 0,5\cdot\vec{a}_1 + 1,5\cdot\vec{a}_2 + 0\cdot\vec{a}_3$.

Проверка:

$$\vec{b} = 0,5\cdot\vec{a}_1 + 1,5\cdot\vec{a}_2 + 0\cdot\vec{a}_3 = 0,5\cdot\{2,-4,3\} + 1,5\cdot\{0,2,1\} + 0\cdot\{4,3,5\} = \{1,1,3\}.$$

Ответ. $\vec{b} = 0,5\cdot\vec{a}_1 + 1,5\cdot\vec{a}_2 + 0\cdot\vec{a}_3$.

Контрольные задания

Задание 1.

Построить линии в полярной системе координат.

1. а) $\rho = 2 - \sin\varphi$; б) $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$.

2. а) $\rho = 3(1 - \cos\varphi)$; б) $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$.

3. а) $\rho = 2 + \sin\varphi$; б) $(x^2 + y^2)^3 = x^4 - y^4$.

4. а) $\rho = 4(1 + \cos\varphi)$; б) $(x^2 + y^2)^3 = 4xy(x^2 - y^2)$.

5. а) $\rho = 2\sin\varphi$; б) $x(x^2 + y^2) = 9y$.

6. а) $\rho = 2\cos\varphi$; б) $(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)^2 = 4x^2y^2$.

7. а) $\rho = 4\sin 2\varphi$; б) $(x^2 + y^2)^2 = 2x^3$.

8. а) $\rho = 2(1 - \sin\varphi)$; б) $(x^2 + y^2)^2 = 9(y^2 - x^2)$.

9. а) $\rho = 2(1 + \sin\varphi)$; б) $(x^2 + y^2)^3 = y^4 - x^4$.

10. а) $\rho = 3 - \cos\varphi$; б) $(x^2 + y^2)^2 = -2xy$.

Задание 2.

Дано комплексное число a. Требуется:

а) записать число a в алгебраической, тригонометрической и показательной формах;

б) найти все корни уравнения $2z^3 = a^2$ и изобразить их на комплексной плоскости.

1. $a = \dfrac{2 + 4i}{1 - 3i}$.

2. $a = \dfrac{1 - 3i}{1 + 2i}$.

3. $a = \dfrac{7 - i}{-3 + 4i}$.

4. $a = \dfrac{8 + 6i}{7 - i}$.

5. $a = \dfrac{4 + 6i}{5 + i}$.

6. $a = \dfrac{5 + i}{2 + 3i}$.

7. $a = \dfrac{7+5i}{6-i}$.

8. $a = \dfrac{5+7i}{6+i}$.

9. $a = \dfrac{1+7i}{3-4i}$.

10. $a = \dfrac{6+4i}{1+5i}$.

Задание 3.

Даны векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{b}$. Требуется:

а) доказать, что векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ образуют базис;

б) найти координаты $\vec{b}$ в базисе $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

1. $\vec{a}_1 = \{-4,\ 8,\ -2\}$, $\vec{a}_2 = \{-1,\ 2,\ 1\}$, $\vec{a}_3 = \{2,\ -3,\ 0\}$, $\vec{b} = \{1,\ 0,\ 3\}$.

2. $\vec{a}_1 = \{3,\ 7,\ -1\}$, $\vec{a}_2 = \{6,\ 9,\ 3\}$, $\vec{a}_3 = \{3,\ 1,\ 2\}$, $\vec{b} = \{6,\ 20,\ -5\}$.

3. $\vec{a}_1 = \{2,\ 1,\ 0\}$, $\vec{a}_2 = \{-3,\ 0,\ 4\}$, $\vec{a}_3 = \{1,\ 1,\ 1\}$, $\vec{b} = \{-6,\ -3,\ 1\}$.

4. $\vec{a}_1 = \{0,\ 2,\ -1\}$, $\vec{a}_2 = \{1,\ 5,\ 0\}$, $\vec{a}_3 = \{3,\ -2,\ 1\}$, $\vec{b} = \{8,\ -7,\ 1\}$.

5. $\vec{a}_1 = \{1,\ 2,\ 3\}$, $\vec{a}_2 = \{0,\ -1,\ 4\}$, $\vec{a}_3 = \{2,\ 0,\ 5\}$, $\vec{b} = \{3,\ 8,\ 1\}$.

6. $\vec{a}_1 = \{2,\ -3,\ 4\}$, $\vec{a}_2 = \{-3,\ 1,\ -2\}$, $\vec{a}_3 = \{-4,\ -1,\ 0\}$, $\vec{b} = \{0,\ -7,\ 8\}$.

7. $\vec{a}_1 = \{-3,\ 1,\ -2\}$, $\vec{a}_2 = \{-1,\ -2,\ 2\}$, $\vec{a}_3 = \{0,\ -7,\ 6\}$, $\vec{b} = \{3,\ -1,\ 0\}$.

8. $\vec{a}_1 = \{2,\ 4,\ 0\}$, $\vec{a}_2 = \{0,\ -1,\ 3\}$, $\vec{a}_3 = \{3,\ -2,\ 1\}$, $\vec{b} = \{4,\ -11,\ 11\}$.

9. $\vec{a}_1 = \{1,\ -4,\ 2\}$, $\vec{a}_2 = \{0,\ 3,\ -1\}$, $\vec{a}_3 = \{2,\ -1,\ 0\}$, $\vec{b} = \{0,\ -4,\ 3\}$.

10. $\vec{a}_1 = \{3,\ -2,\ 1\}$, $\vec{a}_2 = \{0,\ -1,\ 3\}$, $\vec{a}_3 = \{2,\ 4,\ 0\}$, $\vec{b} = \{-9,\ 4,\ 3\}$.

Литература

1. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова. М.: Высшая школа, 1997. Ч. 1, 2. 304 с.
2. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики / Б.П.Демидович. М.: Изд-во «Астрель», 2003. 654 с.
3. Краснов М.Л. Вся высшая математика / М.Л.Краснов, А.И.Киселев, Г.И.Макаренко. М.: Эдиториал УРСС, 2001. Ч. 1. 352 с.
4. Минькова Р.М. Элементы линейной алгебры / Р.М.Минькова. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2005. 46 с.
5. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики / И.П.Натансон. СПб.: Изд-во «Лань», 2003. 736 с.
6. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике / Д.Т.Письменный. М.: Айрис-пресс, 2003. Ч. 1, 2. 288 с.

Приложение

Образец титульного листа

ФГАОУ ВО «Уральский Федеральный Университет
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»
Институт радиоэлектроники и информационных технологий – РТФ

Кафедра Вычислительных методов и уравнений математической физики

Контрольная работа № 1
по векторному анализу

Вариант № 0

студент Иванов И.И.

институт ИРИТ-РтФ

группа РИЗ-160000

зачетная книжка № 00000000

1		2		3	
а	б	а	б	а	б

Екатеринбург
2016