

## 11. ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 11.1. Дифференциальные уравнения однородной линии

Классифицируя электрические цепи, мы отнесли к цепям с распределенными параметрами такие, размер которых вдоль одной оси соизмерим с минимальной длиной волны протекающих в них процессов. Характерным примером таких цепей являются длинные линии, поперечный размер которых пренебрежимо мал, а длина – соизмерима с минимальной длиной волны передаваемого сигнала.

Рассмотрим участок линии длиной  $\Delta x$  отстоящий от начала линии на расстоянии  $x$  и от конца линии на расстоянии  $y$  (рис. 11.1).

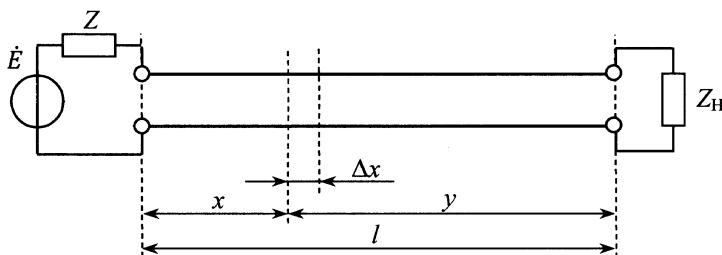


Рис. 11.1

Длину участка  $\Delta x$  выберем много меньше длины волны подводящего колебания. В этом случае его можно рассматривать как участок цепи с сосредоточенными параметрами. В таком качестве выделенный участок может быть охарактеризован некоторой индуктивностью, емкостью, продольным сопротивлением и поперечной проводимостью (рис. 11.2).

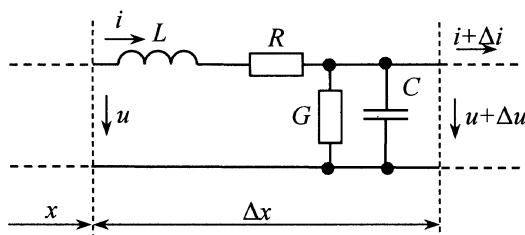


Рис. 11.2

Таким образом, схема замещения всей линии представляет собой множество каскадно соединенных подобных четырехполюсников,

то есть параметры  $L$ ,  $R$ ,  $G$  и  $C$  как бы распределены вдоль всей линии, что и отражено в названии таких цепей. Параметры  $L$ ,  $R$ ,  $G$  и  $C$  выделенного участка линии можно выразить через **первичные параметры** длинной линии, под которыми понимают индуктивность  $L_0$ , емкость  $C_0$ , продольное сопротивление  $R_0$  и поперечную проводимость  $G_0$  линии единичной длины (метры или километры). Параметры, отнесенные к единице длины, называют **погонными**. Если первичные параметры линии неизменны по всей ее длине, то такую линию называют **однородной**. В противном случае линию называют **неоднородной**.

Итак, выразим параметры схемы замещения выделенного участка через первичные параметры линии:

$$L = L_0 \Delta x, \quad R = R_0 \Delta x, \quad C = C_0 \Delta x, \quad G = G_0 \Delta x.$$

Пусть в начале выделенного участка действуют напряжение  $u$  и ток  $i$ . Напряжение на конце выделенного участка будет отличаться от напряжения  $u$  на некоторую величину  $\Delta u$ , что обусловлено падением напряжения на элементах  $L$  и  $R$ . Ток в конце выделенного участка также будет отличаться от тока в начале на некоторую величину  $\Delta i$ , что обусловлено ответвлением тока в элементы  $C$  и  $G$ .

Составим уравнения электрического равновесия для выделенного участка цепи:

$$\begin{aligned} u &= Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} + u + \Delta u; \\ i &= G(u + \Delta u) + C \frac{\partial(u + \Delta u)}{\partial t} + i + \Delta i. \end{aligned}$$

После сокращения и перехода к первичным параметрам линии получим:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \left( R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \right) \Delta x; \\ -\Delta i &= \left[ G_0(u + \Delta u) + C_0 \frac{\partial(u + \Delta u)}{\partial t} \right] \Delta x. \end{aligned}$$

Разделим оба уравнения на  $\Delta x$  и пренебрежем величинами второго порядка малости:

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta u}{\Delta x} &= R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\Delta i}{\Delta x} &\approx G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned}$$

При  $\Delta x \rightarrow 0$  получим

$$\begin{aligned}-\frac{\partial u}{\partial x} &= R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}.\end{aligned}$$

Эти выражения называют *телеграфными уравнениями*.

Решение полученной системы уравнений позволяет определить ток и напряжение в любой точке линии  $x$  в любой момент времени  $t$ , при этом воздействие может быть произвольной функции времени.

## 11.2. Однородная линия при гармоническом воздействии

Рассмотрим установившийся режим в длинной линии при гармоническом воздействии. В этом случае токи и напряжения в любой точке линии также будут гармоническими функциями времени, и задача сводится к нахождению закона изменения амплитуд и фаз напряжения и тока вдоль линии.

При гармоническом воздействии можно использовать метод комплексных амплитуд, в соответствии с которым дифференциальные уравнения длинной линии примут вид:

$$-\frac{d\dot{U}}{dx} = (R_0 + j\omega L_0)\dot{I}; \quad (11.1)$$

$$-\frac{d\dot{I}}{dx} = (G_0 + j\omega C_0)\dot{U}. \quad (11.2)$$

Продифференцируем оба уравнения по  $x$ :

$$-\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = (R_0 + j\omega L_0)\frac{d\dot{I}}{dx}; \quad (11.3)$$

$$-\frac{d^2\dot{I}}{dx^2} = (G_0 + j\omega C_0)\frac{d\dot{U}}{dx}. \quad (11.4)$$

Подставим уравнение (11.2) в (11.3), а уравнение (11.1) в (11.4). Тогда

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = (R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)\dot{U};$$

$$\frac{d^2\dot{I}}{dx^2} = (R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)\dot{I}.$$

Введем обозначение

$$\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}.$$

Величину  $\gamma$  называют *коэффициентом распространения* линии.

С учетом введенного обозначения дифференциальные уравнения примут вид:

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} - \gamma^2 \dot{U} = 0; \quad (11.5)$$

$$\frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} - \gamma^2 \dot{I} = 0. \quad (11.6)$$

Мы получили два одинаковых линейных однородных дифференциальных уравнения второго порядка. Решим уравнение (11.5).

Характеристическое уравнение

$$p^2 - \gamma^2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = \pm \gamma.$$

Тогда решение дифференциального уравнения (11.5) будет иметь вид:

$$\dot{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}, \quad (11.7)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  – постоянные интегрирования.

Ток  $\dot{I}$  проще всего будет найти не из уравнения (11.6), а из уравнения (11.1), подставив в него решение уравнения (11.5):

$$\dot{I} = -\frac{1}{R_0 + j\omega L_0} \frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{1}{R_0 + j\omega L_0} (A_1 \gamma e^{-\gamma x} - A_2 \gamma e^{\gamma x}).$$

Вынесем за скобку  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \frac{\gamma}{R_0 + j\omega L_0} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) = \\ &= \frac{\sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}}{R_0 + j\omega L_0} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) = \\ &= \sqrt{\frac{G_0 + j\omega C_0}{R_0 + j\omega L_0}} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}). \end{aligned}$$

Введем обозначение:

$$Z_B = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}.$$

Величину  $Z_B$  называют **волновым сопротивлением** длинной линии. С учетом введенного обозначения получим:

$$\dot{I} = \frac{1}{Z_B} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}). \quad (11.8)$$

Найдем постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$ , входящие в уравнения (11.7) и (11.8). Пусть известны граничные условия в начале линии, то есть известно, что при  $x=0$  напряжение в начале линии  $\dot{U}(0) = \dot{U}_1$ , а ток  $\dot{I}(0) = \dot{I}_1$ . Тогда из уравнений (11.7) и (11.8) имеем

$$\dot{U}_1 = A_1 + A_2,$$

$$\dot{I}_1 = \frac{A_1}{Z_B} - \frac{A_2}{Z_B}.$$

Решим эту систему из двух уравнений с двумя неизвестными  $A_1$  и  $A_2$ . Постоянная интегрирования

$$A_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{U}_1 & 1 \\ \dot{I}_1 & -\frac{1}{Z_B} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{Z_B} & -\frac{1}{Z_B} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{\dot{U}_1}{Z_B} - \dot{I}_1}{-\frac{1}{Z_B} - \frac{1}{Z_B}} = \frac{\frac{\dot{U}_1}{Z_B} + \dot{I}_1}{\frac{2}{Z_B}} = \frac{\dot{U}_1 + Z_B \dot{I}_1}{2}.$$

Постоянная интегрирования

$$A_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \dot{U}_1 \\ \frac{1}{Z_B} & \dot{I}_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{Z_B} & -\frac{1}{Z_B} \end{vmatrix}} = \frac{\dot{I}_1 - \frac{\dot{U}_1}{Z_B}}{-\frac{2}{Z_B}} = \frac{\dot{U}_1 - Z_B \dot{I}_1}{2}.$$

Подставим найденные значения  $A_1$  и  $A_2$  в уравнения (11.7) и (11.8). Тогда

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_1 + Z_B \dot{I}_1}{2} e^{-\gamma x} + \frac{\dot{U}_1 - Z_B \dot{I}_1}{2} e^{\gamma x}, \quad (11.9)$$

$$i = \frac{\dot{U}_1 + Z_B i_1}{2Z_B} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{U}_1 - Z_B i_1}{2Z_B} e^{\gamma x}. \quad (11.10)$$

Полученные уравнения позволяют найти напряжение и ток в любом сечении линии, если известны ток и напряжение в начале линии.

Если граничные условия заданы на конце линии, то необходимо иметь формулы, связывающие напряжение и ток в произвольном сечении линии с напряжением и током в конце линии. В этом случае расстояние удобнее отсчитывать от конца линии.

Полагая  $x = l - y$ , из уравнений (11.7) и (11.8) получим

$$\begin{aligned} \dot{U} &= A_1 e^{-\gamma(l-y)} + A_2 e^{\gamma(l-y)}, \\ i &= \frac{A_1}{Z_B} e^{-\gamma(l-y)} - \frac{A_2}{Z_B} e^{\gamma(l-y)}. \end{aligned}$$

Найдем постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$ , если известно, что при  $y = 0$  напряжение в конце линии  $\dot{U}(0) = \dot{U}_2$ , а ток  $i(0) = i_2$ .

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= A_1 e^{-\gamma l} + A_2 e^{\gamma l}, \\ i_2 &= \frac{A_1}{Z_B} e^{-\gamma l} - \frac{A_2}{Z_B} e^{\gamma l}. \end{aligned}$$

Разрешим данную систему уравнений относительно  $A_1$  и  $A_2$ .  
Постоянная интегрирования

$$A_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{U}_2 & e^{\gamma l} \\ i_2 & -\frac{e^{\gamma l}}{Z_B} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-\gamma l} & e^{\gamma l} \\ \frac{e^{-\gamma l}}{Z_B} & -\frac{e^{\gamma l}}{Z_B} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{\dot{U}_2}{Z_B} e^{\gamma l} - i_2 e^{\gamma l}}{-\frac{1}{Z_B} - \frac{1}{Z_B}} = \frac{\dot{U}_2 + Z_B i_2}{2} e^{\gamma l}.$$

Постоянная интегрирования

$$A_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} e^{-\gamma l} & \dot{U}_2 \\ \frac{e^{-\gamma l}}{Z_B} & i_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-\gamma l} & e^{\gamma l} \\ \frac{e^{-\gamma l}}{Z_B} & -\frac{e^{\gamma l}}{Z_B} \end{vmatrix}} = \frac{i_2 e^{-\gamma l} - \frac{\dot{U}_2}{Z_B} e^{-\gamma l}}{-\frac{2}{Z_B}} = \frac{\dot{U}_2 - Z_B i_2}{2} e^{-\gamma l}.$$

Подставив найденные постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$  в уравнения (11.7) и (11.8), получим

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \frac{\dot{U}_2 + Z_B \dot{I}_2}{2} e^{\gamma l} e^{-\gamma x} + \frac{\dot{U}_2 - Z_B \dot{I}_2}{2} e^{-\gamma l} e^{\gamma x}, \\ i &= \frac{\dot{U}_2 + Z_B \dot{I}_2}{2Z_B} e^{\gamma l} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{U}_2 - Z_B \dot{I}_2}{2Z_B} e^{-\gamma l} e^{\gamma x}.\end{aligned}$$

Но  $l-x=y$ , тогда

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_2 + Z_B \dot{I}_2}{2} e^{\gamma y} + \frac{\dot{U}_2 - Z_B \dot{I}_2}{2} e^{-\gamma y}; \quad (11.11)$$

$$i = \frac{\dot{U}_2 + Z_B \dot{I}_2}{2Z_B} e^{\gamma y} - \frac{\dot{U}_2 - Z_B \dot{I}_2}{2Z_B} e^{-\gamma y}. \quad (11.12)$$

Уравнения (11.11) и (11.12) позволяют найти напряжение и ток в произвольном сечении линии по известным напряжению  $\dot{U}_2$  и току  $\dot{I}_2$  в конце линии. Уравнения (11.9), (11.10) и (11.11), (11.12) называют **уравнениями однородной линии в показательной форме**.

Выделим действительную и мнимую часть комплексной величины  $\gamma$ :

$$\gamma = \alpha + j\beta.$$

Тогда уравнения (11.9) и (11.10) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \frac{\dot{U}_1 + Z_B \dot{I}_1}{2} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + \frac{\dot{U}_1 - Z_B \dot{I}_1}{2} e^{\alpha x} e^{j\beta x}, \\ i &= \frac{\dot{U}_1 + Z_B \dot{I}_1}{2Z_B} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} - \frac{\dot{U}_1 - Z_B \dot{I}_1}{2Z_B} e^{\alpha x} e^{j\beta x}.\end{aligned}$$

Перейдем от комплексных значений напряжения и тока к их мгновенным значениям:

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \sqrt{2} \left| \frac{\dot{U}_1 + Z_B \dot{I}_1}{2} \right| e^{-\alpha x} \cos(\omega t + \psi_1 - \beta x) + \\ &+ \sqrt{2} \left| \frac{\dot{U}_1 - Z_B \dot{I}_1}{2} \right| e^{\alpha x} \cos(\omega t + \psi_2 + \beta x); \quad (11.13)\end{aligned}$$

$$i(x, t) = \sqrt{2} \left| \frac{\dot{U}_1 + Z_B \dot{I}_1}{2Z_B} \right| e^{-\alpha x} \cos(\omega t + \varphi_1 - \beta x) -$$

$$-\sqrt{2} \left| \frac{\dot{U}_1 - Z_B \dot{I}_1}{2Z_B} \right| e^{\alpha x} \cos(\omega t + \varphi_2 + \beta x). \quad (11.14)$$

Как видно из этих уравнений, мгновенные значения напряжения и тока в любом сечении линии складываются из двух составляющих. Рассмотрим первое слагаемое в уравнении (11.13).

Зафиксируем координату  $x$  и посмотрим, каким образом первое слагаемое зависит от времени. В этом случае первое слагаемое в уравнении (11.13) представляет собой гармоническую функцию времени. В каждом сечении линии амплитуда колебаний постоянна, однако, по мере удаления от начала линии амплитуда колебаний уменьшается (множитель  $e^{-\alpha x}$ ).

Зафиксируем время  $t$  и посмотрим, каким образом первое слагаемое зависит от координаты  $x$ . В этом случае первое слагаемое в уравнении (11.13) описывает затухающую гармоническую волну, амплитуда которой убывает по мере удаления от начала линии (рис.11.3).

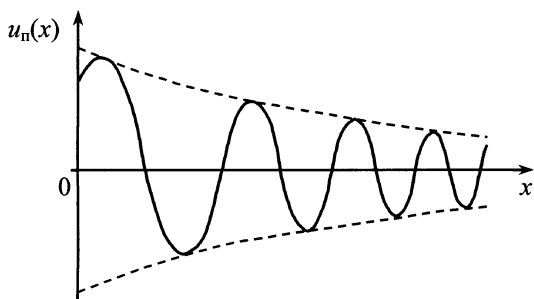


Рис. 11.3

Величина  $\alpha$  характеризует уменьшение амплитуды напряжения на единичной длине линии и называется **коэффициентом ослабления** (ранее использовался термин «**коэффициент затухания**»). Величина  $\beta$  характеризует изменение фазы колебания на единичной длине линии и называется **коэффициентом фазы**.

Уменьшение амплитуды волны вдоль линии обусловлено потерями в ней, а запаздывание фазы – конечной скоростью распространения волны вдоль линии.

Найдем длину волны в линии как расстояние  $\lambda$ , на котором фаза колебания изменяется на  $2\pi$ .

$$(\omega t + \psi_1 - \beta x) - [\omega t + \psi_1 - \beta(x + \lambda)] = 2\pi.$$

После сокращения получим  $\beta\lambda = 2\pi$ . Откуда



$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}.$$

Эта формула устанавливает связь коэффициента фазы линии и длины волны в линии.

Итак, первое слагаемое в формуле (11.13) при фиксированном  $t$  описывает распределение напряжения вдоль линии. Если же рассматривать это распределение как функцию времени, то первое слагаемое в формуле (11.13) описывает затухающую гармоническую волну, распространяющуюся от начала к концу линии. Такую волну называют *прямой* или *падающей*.

Скорость распространения гармонического колебания вдоль линии характеризуется *фазовой скоростью* волны, под которой понимают скорость перемещения вдоль линии постоянного фазового состояния. Это условие имеет вид

$$\omega t + \psi_1 - \beta x = \text{const}.$$

Продифференцируем это выражение по времени:

$$\frac{d}{dt}(\omega t + \psi_1 - \beta x) = 0.$$

$$\omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0.$$

Отсюда фазовая скорость волны

$$v_\phi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta}.$$

За время, равное периоду, волна перемещается на расстояние  $\lambda$ . Тогда

$$\lambda = v_\phi T = \frac{v_\phi}{f}.$$

Рассмотрим второе слагаемое в формуле (11.13). Оно описывает затухающую волну, распространяющуюся от конца линии к ее началу, о чем говорят знаки «плюс» перед  $\alpha$  и  $\beta$ . Такую волну называют *обратной* или *отраженной* (рис. 11.4).

Поскольку уравнение (11.14) по структуре аналогично уравнению (11.13), то можно сделать вывод, что напряжение и ток в любом сечении линии представляют собой суперпозицию падающей и отраженной волн.

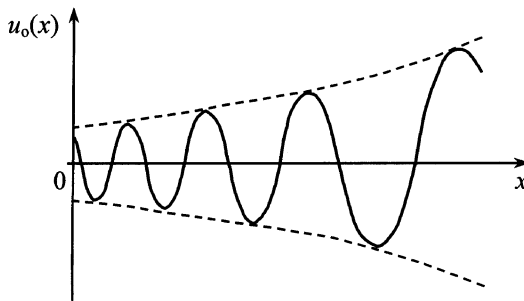


Рис 11.4

Возвращаясь к комплексной форме записи токов и напряжений [см. (11.9) и (11.10)], получим

$$\dot{U} = \dot{U}_{\Pi} + \dot{U}_0;$$

$$i = i_{\Pi} - i_0 = \frac{\dot{U}_{\Pi}}{Z_B} - \frac{\dot{U}_0}{Z_B},$$

где

$$\dot{U}_{\Pi} = \frac{\dot{U}_1 + Z_B i_1}{2} e^{-\gamma x};$$

$$\dot{U}_0 = \frac{\dot{U}_1 - Z_B i_1}{2} e^{\gamma x}.$$

Напряжение и ток прямой и обратной волн связаны законом Ома:

$$i_{\Pi} = \frac{\dot{U}_{\Pi}}{Z_B}; \quad i_0 = \frac{\dot{U}_0}{Z_B}.$$

Из этих соотношений становится понятно, почему сопротивление  $Z_B$  называют волновым сопротивлением. Волновое сопротивление линии – это сопротивление линии для падающей и отраженной волн порознь. Волновое сопротивление  $Z_B$  и коэффициент распространения  $\gamma$  называют **волновыми** или **вторичными параметрами** однородной линии.

В теории длинных линий используются также понятия **коэффициент отражения по напряжению**

$$n_u = \frac{\dot{U}_0(x)}{\dot{U}_{\Pi}(x)}$$

и **коэффициент отражения по току**

$$n_i = \frac{i_0(x)}{i_{\Pi}(x)}.$$

Поскольку  $n_u = n_i = n$ , то говорят просто о коэффициенте отражения. Кроме того, коэффициент отражения обычно определяют не в произвольном сечении линии, а в точках неоднородности. Если сама линия однородна, то точками неоднородности будут начало и конец линии.

***Коэффициент отражения в начале линии***

$$n_1 = \frac{\dot{U}_0(x=0)}{\dot{U}_{\Pi}(x=0)}.$$

***Коэффициент отражения в конце линии***

$$n_2 = \frac{\dot{U}_0(x=l)}{\dot{U}_{\Pi}(x=l)} = \frac{\dot{U}_0(y=0)}{\dot{U}_{\Pi}(y=0)}.$$

Запишем уравнения однородной линии через коэффициенты отражения. Уравнения (11.9) и (11.10) в этом случае примут вид

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_1 + Z_B \dot{I}_1}{2} (e^{-\gamma x} + n_1 e^{\gamma x});$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_1 + Z_B \dot{I}_1}{2Z_B} (e^{-\gamma x} - n_1 e^{\gamma x});$$

а уравнения (11.11) и (11.12), соответственно,

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_2 + Z_B \dot{I}_2}{2} (e^{\gamma y} + n_2 e^{-\gamma y});$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_2 + Z_B \dot{I}_2}{2Z_B} (e^{\gamma y} - n_2 e^{-\gamma y}).$$

Найдем коэффициент отражения в конце линии. Из уравнения (11.11) следует:

$$n_2 = \frac{\dot{U}_0(y=0)}{\dot{U}_{\Pi}(y=0)} = \frac{\dot{U}_2 - Z_B \dot{I}_2}{\dot{U}_2 + Z_B \dot{I}_2}.$$

Разделив числитель и знаменатель на  $\dot{I}_2$ , получим

$$n_2 = \frac{\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} - Z_B}{\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} + Z_B}.$$

Но  $\dot{U}_2/\dot{I}_2 = Z_H$ . Тогда

$$n_2 = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B}.$$

Отсюда следует, что при  $Z_H = Z_B$  коэффициент отражения  $n_2 = 0$  и отраженная волна в линии отсутствует. В этом случае говорят, что *линия работает на согласованную нагрузку*. Такой режим работы линии называют *режимом бегущих волн*. Если сопротивление источника выбрано равным волновому сопротивлению линии, то говорят, что *источник и линия согласованы*. Если линия согласована как с источником, так и с нагрузкой, то говорят, что *линия работает в согласованном режиме*. Согласованный режим работы линии широко используется в радиотехнике и связи.

### 11.3. Линия без потерь

Под *линией без потерь* будем понимать линию, у которой продольное сопротивление  $R_0 = 0$  и поперечная проводимость  $G_0 = 0$ . Такая идеализация справедлива при работе линии на высоких частотах, когда  $\omega L_0 \gg R_0$ , а  $\omega C_0 \gg G_0$ .

Коэффициент распространения линии без потерь

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = j\omega\sqrt{L_0 C_0}.$$

Отсюда следует, что коэффициент ослабления линии без потерь  $\alpha = 0$ , а коэффициент фазы  $\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}$ .

Волновое сопротивление линии без потерь

$$Z_B = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = R_B,$$

то есть волновое сопротивление линии без потерь является чисто активным.

Фазовая скорость распространения волн в линии без потерь

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

Получим уравнения однородной линии без потерь при известных граничных условиях на конце линии, для чего в уравнениях (11.11) и (11.12) положим  $\gamma = j\beta$ . Тогда

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \frac{\dot{U}_2 + Z_B \dot{I}_2}{2} e^{j\beta y} + \frac{\dot{U}_2 - Z_B \dot{I}_2}{2} e^{-j\beta y}; \\ \dot{I} &= \frac{\dot{U}_2 + Z_B \dot{I}_2}{2Z_B} e^{j\beta y} - \frac{\dot{U}_2 - Z_B \dot{I}_2}{2Z_B} e^{-j\beta y}.\end{aligned}$$

Перегруппируем слагаемые в этих выражениях:

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \dot{U}_2 \frac{e^{j\beta y} + e^{-j\beta y}}{2} + Z_B \dot{I}_2 \frac{e^{j\beta y} - e^{-j\beta y}}{2}; \\ \dot{I} &= \frac{\dot{U}_2}{Z_B} \frac{e^{j\beta y} - e^{-j\beta y}}{2} + \dot{I}_2 \frac{e^{j\beta y} + e^{-j\beta y}}{2}.\end{aligned}$$

Но

$$\frac{e^{j\beta y} + e^{-j\beta y}}{2} = \cos \beta y, \quad \text{а} \quad \frac{e^{j\beta y} - e^{-j\beta y}}{2j} = \sin \beta y.$$

С учетом этих соотношений уравнения однородной линии без потерь примут вид:

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \dot{U}_2 \cos \beta y + j Z_B \dot{I}_2 \sin \beta y; \\ \dot{I} &= j \frac{\dot{U}_2}{Z_B} \sin \beta y + \dot{I}_2 \cos \beta y.\end{aligned}$$

Рассмотрим режим бегущих волн в линии без потерь. Поскольку волновое сопротивление линии без потерь является чисто активным, то  $Z_H = R_H = R_B$ . В этом случае

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \dot{U}_2 (\cos \beta y + j \sin \beta y); \\ \dot{I} &= \dot{I}_2 (\cos \beta y + j \sin \beta y).\end{aligned}$$

Запишем скобку в показательной форме

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \dot{U}_2 e^{j\beta y} = \dot{U}_{\Pi}; \\ \dot{I} &= \dot{I}_2 e^{j\beta y} = \dot{I}_{\Pi}.\end{aligned}$$

Входное сопротивление линии без потерь в режиме бегущих волн

$$Z_{ВХ} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\dot{U}_2 e^{j\beta y}}{\dot{I}_2 e^{j\beta y}} = Z_H = R_H = R_B.$$

Итак, в режиме бегущих волн

- существуют только падающие волны напряжения и тока, при этом их амплитуды постоянны по всей длине линии;
- сдвиг фаз между напряжением и током равен нулю в любом сечении линии;
- входное сопротивление не зависит от длины линии, имеет чисто активный характер и равно волновому сопротивлению линии.

Если  $Z_H \neq Z_B$ , то часть энергии падающей волны отражается от конца линии и возвращается обратно к источнику в виде отраженной волны. Если  $|n_2| = 1$ , то в любом сечении линии без потерь амплитуды падающей и отраженной волн будут равны. В этом случае в линии установится режим, который называют *режимом стоячих волн*.

Определим условия возникновения в линии режима стоячих волн, для чего проанализируем выражение для коэффициента отражения на конце линии

$$n_2 = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B}.$$

Отсюда следует, что  $|n_2| = 1$ , если

- $Z_H = 0$ , то есть при коротком замыкании на конце линии. В этом случае  $n_2 = -1$ ;
- $Z_H = \infty$ , то есть при холостом ходе на конце линии. В этом случае  $n_2 = 1$ ;
- $Z_H = jx_H$ , то есть при чисто реактивном характере нагрузки. В этом случае

$$n_2 = \frac{jx_H - R_B}{jx_H + R_B} = \frac{\sqrt{R_B^2 + x_H^2}}{\sqrt{R_B^2 + x_H^2}} \cdot \frac{e^{-j \arctg \frac{x_H}{R_B}}}{e^{j \arctg \frac{x_H}{R_B}}} = e^{-2j \arctg \frac{x_H}{R_B}}.$$

Найдем распределение напряжения и тока вдоль линии, закороченной на конце. Полагая в уравнениях однородной линии без потерь  $\dot{U}_2 = 0$ , получим

$$\dot{U} = jR_B \dot{I}_2 \sin \beta y;$$

$$\dot{I} = I_2 \cos \beta y \cdot$$

Перейдем к мгновенным значениям напряжения и тока:

$$u(y, t) = \sqrt{2} R_B I_2 \sin \beta y \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right);$$

$$i(y, t) = \sqrt{2} I_2 \cos \beta y \cos \omega t \cdot$$

Здесь мы полагаем, что начальная фаза тока в конце линии равна нулю, что всегда можно обеспечить соответствующим выбором начала отсчета времени.

Амплитудные значения напряжения и тока в линии

$$U_m(y) = \sqrt{2} R_B I_2 |\sin \beta y|;$$

$$I_m(y) = \sqrt{2} I_2 |\cos \beta y| \cdot$$

Как видно из графиков распределения амплитуд напряжения и тока вдоль линии (рис. 11.5), амплитуды напряжения и тока изменяются по периодическому закону, в одних точках обращаясь в нуль, а в других – достигая максимума.

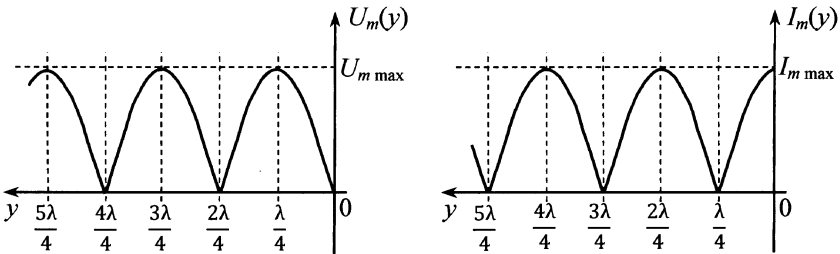


Рис. 11.5

Точки линии, в которых амплитуда напряжения (тока) равна нулю, называют **узлами напряжения (тока)**.

Точки линии, в которых амплитуда напряжения (тока) достигает максимума, называют **пучностями напряжения (тока)**.

Из графиков распределения амплитуд напряжения и тока вдоль линии следует:

- пучности напряжения соответствуют узлам тока и наоборот;
- в конце линии будет узел напряжения и пучность тока;
- узлы и пучности перемежаются с интервалом  $\lambda/4$ ;
- расстояние между соседними узлами равно  $\lambda/2$ ;
- расстояние между соседними пучностями равно  $\lambda/2$ .

На рис. 11.6 приведены графики распределения мгновенных значений напряжения и тока для различных моментов времени, из которых следует, что фазовые состояния не перемещаются вдоль линии, то есть волны напряжения и тока как бы стоят на месте. Такой режим работы линии называют *режимом стоячих волн*.

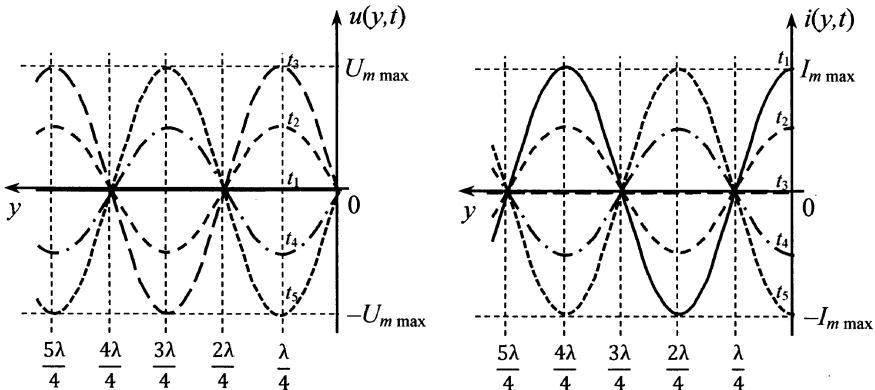


Рис. 11.6

Поскольку ток и напряжение в линии сдвинуты на угол  $\pi/2$ , то ясно, что в режиме стоячих волн энергия вдоль линии не передается. В каждом сечении линии имеет место лишь обмен энергией между электрическими и магнитными полями.

Рассмотрим линию без потерь в режиме холостого хода на ее конце. В этом случае  $i_2 = 0$  и уравнения линии без потерь примут вид:

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \dot{U}_2 \cos \beta y; \\ i &= j \frac{\dot{U}_2}{R_B} \sin \beta y.\end{aligned}$$

Перейдем к мгновенным значениям напряжения и тока, полагая начальную фазу напряжения в конце линии равной нулю:

$$\begin{aligned}u(y, t) &= \sqrt{2} U_2 \cos \beta y \cos \omega t; \\ i(y, t) &= \sqrt{2} \frac{U_2}{R_B} \sin \beta y \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right).\end{aligned}$$

Найдем распределение амплитуд напряжения и тока в линии:

$$U_m(y) = \sqrt{2} U_2 |\cos \beta y|;$$



$$I_m(y) = \sqrt{2} \frac{U_2}{R_B} |\sin \beta y| \cdot$$

На рис. 11.7 приведены графики распределения амплитуд напряжения и тока вдоль линии. Видно, что в этом случае в линии также установится режим стоячих волн, но в конце линии будет пучность напряжения и узел тока.

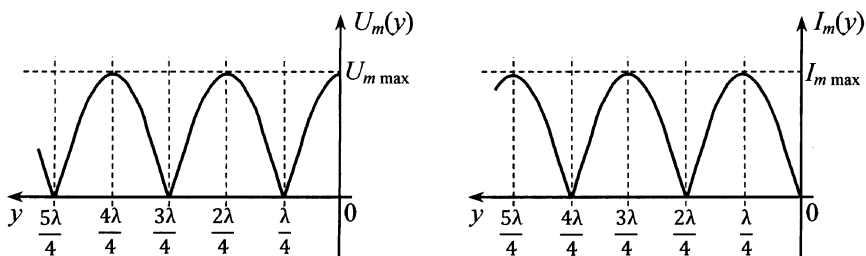


Рис. 11.7

В линии без потерь, работающей на чисто реактивную нагрузку  $Z_H = jx_H$ , также установится режим стоячих волн, но в конце линии не будет пучностей или узлов ни напряжения, ни тока. Графики распределения амплитуд напряжения и тока сместятся вдоль оси  $y$  на некоторое расстояние, которое будет зависеть от соотношения  $x_H$  и  $R_B$ .

Мы рассмотрели крайние случаи: в режиме бегущих волн амплитуда отраженной волны во всех сечениях линии равна нулю, а в режиме стоячих волн амплитуды отраженной и падающей волн во всех сечениях линии одинаковы. Возможны и промежуточные ситуации, когда отраженная волна существует, но ее амплитуда меньше амплитуды падающей волны. В этом случае в линии установится так называемый **режим смешанных волн**, который можно рассматривать как наложение режимов бегущих и стоячих волн.

В режиме смешанных волн энергия падающей волны частично поглощается нагрузкой, а частично возвращается источнику в виде отраженной волны.

В режиме смешанных волн распределения амплитуд напряжения и тока вдоль линии также будут иметь минимумы и максимумы, однако в минимумах амплитуды напряжения и тока не будут равны нулю.

Если сопротивление нагрузки  $R_H > R_B$ , то в конце линии будет максимум напряжения (рис. 11.8), если  $R_H < R_B$ , то в конце линии будет максимум тока. Чем ближе режим работы линии к согласован-

ному, тем ближе будут уровни максимального  $U_{m \max}$  и минимального  $U_{m \min}$  напряжений.

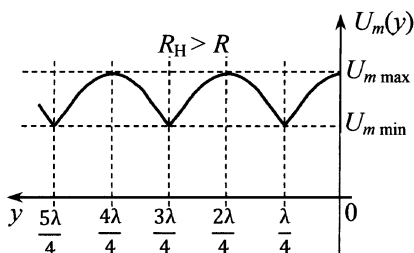


Рис. 11.8

Степень близости режима работы линии к режиму бегущих волн характеризуют **коэффициентом бегущей волны**

$$K_{\text{БВ}} = \frac{U_{m \min}}{U_{m \max}} = \frac{I_{m \min}}{I_{m \max}}.$$

Коэффициент бегущей волны изменяется от нуля в режиме стоячих волн, до единицы в режиме бегущих волн.

Используется также величина, обратная  $K_{\text{БВ}}$ , которую называют **коэффициентом стоячей волны**

$$K_{\text{СВ}} = \frac{1}{K_{\text{БВ}}} = \frac{U_{m \max}}{U_{m \min}} = \frac{I_{m \max}}{I_{m \min}}.$$

Коэффициент стоячей волны изменяется от единицы в режиме бегущих волн до бесконечности в режиме стоячих волн.

Очевидно, что в максимумах падающая и отраженная волны складываются в фазе, а в минимумах – в противофазе. Тогда

$$U_{m \max} = U_{m \Pi} + U_{m 0};$$

$$U_{m \min} = U_{m \Pi} - U_{m 0}.$$

Коэффициент бегущей волны с учетом этих соотношений можно представить следующим образом:

$$K_{\text{БВ}} = \frac{U_{m \min}}{U_{m \max}} = \frac{U_{m \Pi} - U_{m 0}}{U_{m \Pi} + U_{m 0}} = \frac{1 - \frac{U_{m 0}}{U_{m \Pi}}}{1 + \frac{U_{m 0}}{U_{m \Pi}}}.$$

Но  $U_{m 0}/U_{m \Pi} = n_2$  – это коэффициент отражения в конце линии. Тогда

$$K_{\text{БВ}} = \frac{1 - n_2}{1 + n_2}.$$

### 11.3. Входное сопротивление линии

Входное сопротивление линии  $Z_{\text{ВХ}} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1$ . Напряжение  $\dot{U}_1$  и ток  $\dot{I}_1$  можно найти из уравнений однородной линии (11.11) и (11.12), положив в них  $u = l$ . Тогда

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \frac{\dot{U}_2 + Z_{\text{Б}} \dot{I}_2}{2} e^{\gamma l} + \frac{\dot{U}_2 - Z_{\text{Б}} \dot{I}_2}{2} e^{-\gamma l}; \\ \dot{I}_1 &= \frac{\dot{U}_2 + Z_{\text{Б}} \dot{I}_2}{2 Z_{\text{Б}}} e^{\gamma l} - \frac{\dot{U}_2 - Z_{\text{Б}} \dot{I}_2}{2 Z_{\text{Б}}} e^{-\gamma l}.\end{aligned}$$

Перегруппируем слагаемые

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \dot{U}_2 \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} + Z_{\text{Б}} \dot{I}_2 \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2}; \\ \dot{I}_1 &= \frac{\dot{U}_2}{Z_{\text{Б}}} \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} + \dot{I}_2 \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2}.\end{aligned}$$

Входное сопротивление линии

$$Z_{\text{ВХ}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2 \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} + Z_{\text{Б}} \dot{I}_2 \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2}}{\frac{\dot{U}_2}{Z_{\text{Б}}} \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} + \dot{I}_2 \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2}}.$$

Разделим числитель и знаменатель на  $\dot{I}_2 (e^{\gamma l} + e^{-\gamma l})/2$  и учтем, что  $\dot{U}_2 / \dot{I}_2 = Z_{\text{Н}}$ . Тогда

$$Z_{\text{ВХ}} = Z_{\text{Б}} \frac{Z_{\text{Н}} + Z_{\text{Б}} \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}}{Z_{\text{Б}} + Z_{\text{Н}} \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}} = Z_{\text{Б}} \frac{Z_{\text{Н}} + Z_{\text{Б}} \text{th } \gamma l}{Z_{\text{Б}} + Z_{\text{Н}} \text{th } \gamma l}.$$

Отсюда следует, что входное сопротивление линии сложным образом зависит от сопротивления нагрузки  $Z_{\text{Н}}$ , длины линии  $l$  и волновых параметров линии  $Z_{\text{Б}}$  и  $\gamma$ . Если линия работает на согласованную нагрузку, то есть  $Z_{\text{Н}} = Z_{\text{Б}}$ , то  $Z_{\text{ВХ}} = Z_{\text{Б}}$ . В этом случае входное сопро-

тивление линии не зависит от ее длины и равно волновому сопротивлению линии.

Найдем входное сопротивление линии без потерь. Принимая во внимание, что в линии без потерь  $\gamma = j\beta$  и  $Z_B = R_B$ , получим

$$Z_{BX} = R_B \frac{Z_H + jR_B \operatorname{tg} \beta l}{R_B + jZ_H \operatorname{tg} \beta l}.$$

Но  $\beta = 2\pi/\lambda$  (в любой линии, а не только в линии без потерь). Тогда

$$Z_{BX} = R_B \frac{Z_H + jR_B \operatorname{tg} \frac{2\pi l}{\lambda}}{R_B + jZ_H \operatorname{tg} \frac{2\pi l}{\lambda}}. \quad (11.15)$$

Входное сопротивление линии без потерь в общем случае также сложным образом зависит от сопротивления нагрузки  $Z_H$ , длины линии  $l$  и волновых параметров линии  $R_B$  и  $\gamma$ . Проанализируем частные случаи.

Найдем входное сопротивление короткозамкнутой линии без потерь. При  $Z_H = 0$  из соотношения (11.15) следует

$$Z_{BX \text{ КЗ}} = jR_B \operatorname{tg} \frac{2\pi l}{\lambda}.$$

В этом случае входное сопротивление линии без потерь будет иметь чисто реактивный характер

$$x_{BX \text{ КЗ}} = R_B \operatorname{tg} \frac{2\pi l}{\lambda}.$$

Из графиков зависимости входного сопротивления короткозамкнутой линии без потерь от длины линии (рис. 11.9) следует:

- при  $l < \lambda/4$  короткозамкнутая линия без потерь ведет себя как индуктивность;
- при  $l = \lambda/4$  короткозамкнутая линия без потерь ведет себя как параллельный колебательный контур;
- при  $\lambda/4 < l < \lambda/2$  короткозамкнутая линия без потерь ведет себя как емкость;
- при  $l = \lambda/2$  короткозамкнутая линия без потерь ведет себя как последовательный колебательный контур;
- при дальнейшем увеличении длины линии картина повторяется с периодом  $\lambda/2$ .

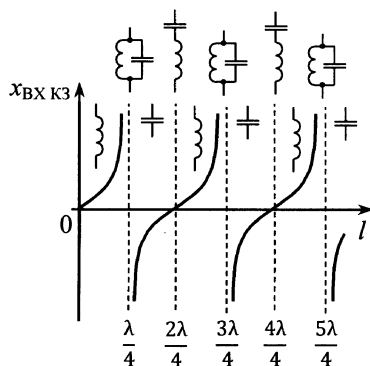


Рис. 11.9

Найдем входное сопротивление разомкнутой линии без потерь. При  $Z_H = \infty$  из соотношения (11.15) следует:

$$Z_{BX\text{ XX}} = R_B \frac{1}{j \operatorname{tg} \frac{2\pi l}{\lambda}} = -j R_B \operatorname{ctg} \frac{2\pi l}{\lambda}.$$

В этом случае входное сопротивление линии также будет иметь чисто реактивный характер

$$x_{BX\text{ XX}} = -R_B \operatorname{ctg} \frac{2\pi l}{\lambda}.$$

Из графиков зависимости входного сопротивления разомкнутой линии без потерь от длины линии (рис. 11.10) следует:

- при  $l < \lambda/4$  разомкнутая линия без потерь ведет себя как емкость;
- при  $l = \lambda/4$  разомкнутая линия без потерь ведет себя как последовательный колебательный контур;
- при  $\lambda/4 < l < \lambda/2$  разомкнутая линия без потерь ведет себя как индуктивность;
- при  $l = \lambda/2$  разомкнутая линия без потерь ведет себя как параллельный колебательный контур;
- при дальнейшем увеличении длины линии картина повторяется с периодом  $\lambda/2$ .

Рассмотренные свойства короткозамкнутых и разомкнутых отрезков длинных линий позволяют использовать их в качестве резонансных систем в диапазоне сверхвысоких частот. Добротность таких резонансных систем достигает нескольких тысяч.

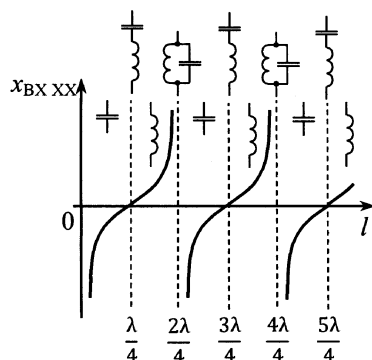


Рис. 11.10

Короткозамкнутый четвертьволновой отрезок линии используют для организации защитного заземления антенн (рис. 11.11).

Короткозамкнутые отрезки линий можно использовать в качестве металлических изоляторов (рис. 11.12).

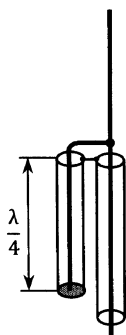


Рис. 11.11

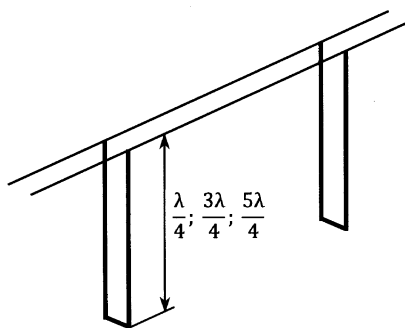


Рис. 11.12

Четвертьволновой отрезок линии можно использовать в качестве трансформатора сопротивлений, то есть как согласующее устройство.

Найдем входное сопротивление линии длиной  $l = \lambda/4$ , нагруженной на сопротивление  $Z_H$ . Из (11.15) получим

$$Z_{BX} = R_B \frac{jR_B}{jZ_H} = \frac{R_B^2}{Z_H}.$$

Отсюда следует, что четвертьволновой отрезок линии трансформирует сопротивление  $Z_H$  в сопротивление  $Z_{BX}$ . Если сопротивление нагрузки  $Z_H$  не равно волновому сопротивлению  $Z_B$  основной линии,

то между ними можно включить четвертьволновой отрезок линии с волновым сопротивлением

$$R_B = \sqrt{Z_{BX}Z_H}.$$

В отрезке будет режим смешанных волн, но так как его длина всего  $\lambda/4$ , то потери будут невелики.