

Федеральное агентство по образованию  
ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» –  
Новоуральский технологический институт»  
ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет – УПИ им.первого Президента  
РФ Б.Н.Ельцина»

В. Г. Лисиенко, П. А. Дюгай, В. В. Волков, В. В. Еголаев, А. Е. Банных

## **Моделирование и автоматизированное управление**

Научный редактор проф. д.т.н. В. Г. Лисиенко

«Рекомендовано Региональным отделением УрФО учебно-методического объединения вузов Российской Федерации по образованию в области радиотехники, электроники, биомедицинской техники и автоматизации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 220200 – Автоматизация и управление в УрФО».

Новоуральск 2010

УДК 681.518.2  
ББК 31.2

Рецензенты:

кафедра «Информатики» ГОУ ВПО «Уральский государственный горный университет»;

заместитель Генерального директора по научной работе и ядерной безопасности ОАО «Уральский электрохимический комбинат», к.ф.м.н., Соловьев Г.С.;

заместитель начальника отдела «Информационных технологий» ОАО «Уральский электрохимический комбинат», к.т.н., Курушкин В.К.;

Авторы: В. Г. Лисиенко, П. А. Дюгай, В. В. Волков, В. В. Еголаев, А. Е. Банных  
Моделирование и автоматизированное управление. Учебное пособие. / В. Г. Лисиенко, П. А. Дюгай, В. В. Волков, В. В. Еголаев, А. Е. Банных / под ред. В. Г. Лисиенко. – Новоуральск: ФГБОУ ВПО «НИЯУ «МИФИ» – НТИ», 2010. – 179 с.

ISBN 5-332-00025-7

В учебном пособии рассмотрены вопросы, связанные с математическим моделированием технологических процессов применительно к автоматизированным системам управления. Дано представление об автоматизированных системах управления и современной теории автоматизированного управления. Определена роль математического моделирования в функционировании автоматизированных систем. Приведены основные функции АСУ ТП. Освещены стохастические и детерминированные подходы при построении математических моделей. Рассмотрены важнейшие функции АСУ ТП: оценивание, идентификация, диагностика, оптимизация и средства реализации этих функций. Рассмотрена роль имитационного моделирования.

Учебное пособие предназначено для студентов обучающихся по направлению подготовки 230100 Информатика и вычислительная техника специальности 230102 «Автоматизированные системы обработки информации и управления» и по направлению 220200 «Автоматизация и управление» специальности 220201 «Управление и информатика в технических системах», а также может быть полезно аспирантам, обучающимся по специальностям 051318 «Моделирование, численные методы и комплексы программ», 051306 «Автоматизация и управление технологических процессов и производств» и по ряду других направлений, специальностей связанных с управлением и автоматизацией.

Библиогр.: 62 назв. табл. 2 рис. 78

© ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» – Новоуральский технологический институт»

© ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет – УПИ»

© В. Г. Лисиенко, П. А. Дюгай,  
В. В. Волков, В. В. Еголаев, А. Е. Банных

ISBN 5-332-00025-7

## Оглавление

Введение .....	7
Глава 1. Представление об АСУ, АСУП, АСУ ТП и ИАСУ. Принципы построения автоматизированных систем управления, включающих ЭВМ и оператора .....	9
1.1. Некоторые даты и временные интервалы.....	9
1.2 Основные функции АСУ П и АСУ ТП. Принципы построения АСУ ТП.....	10
1.3 Структура локальной системы авторегулирования (ЛСАР), её место в АСУ ТП. ЛСАР, работающие по отклонению и по программе. ....	13
Глава 2. Понятие о современной теории автоматического управления (СТАУ) и функциональная структура современной АСУ ТП .....	16
2.1 Основные задачи СТАУ .....	16
2.2 Функциональная структура современной АСУ ТП (схема У. Рея).....	18
Глава 3. Математические модели и их основные разновидности применительно к процессам управления.....	21
3.1 Методы построения математических моделей объекта для целей управления .....	21
3.2 Математические модели и модели управления.....	22
3.3 Основные этапы моделирования в классическом представлении .....	25
3.4 Понятие об аналогии, примеры математических моделей	31
3.5 Классификация математических моделей по сложности и уровни АСУ ТП. ....	34
3.6 Понятие об объектах с сосредоточенными и распределенными параметрами.....	35
3.7 Сложные системы и имитационное моделирование сложных систем .....	37
3.8 Числа подобия, понятие об уравнениях в числах подобия (критериальных уравнениях).....	44

Глава 4. Обобщенный термодинамический подход .....	49
4.1 Обобщенный термодинамический подход (ОТП) как детерминированная основа для построения математических моделей применительно к процессам управления.....	49
4.2 Методика и примеры использования обобщенного термодинамического подхода при составлении математических моделей объектов с сосредоточенными параметрами .....	52
4.3 Способ детерминированной адаптации регулятора (детерминировано адаптивный регулятор).....	65
4.4 Обобщенный термодинамический подход как основа детерминированной процедуры построения полной математической модели объектов с распределенными параметрами. ....	76
Глава 5. Основные методы решения задач применительно к объектам с распределёнными параметрами. Метод конечных разностей.....	85
5.1 Основы динамического зонально-узлового метода.....	86
5.2 Основы метода Монте-Карло.....	92
5.3 Метод Монте-Карло, основанный на принципе узлового разбиения .....	96
5.4 Метод конечных разностей – мелкой сетки.....	102
5.5 Методы численного решения систем нелинейных уравнений на примере решения системы зональных уравнений ...	108
Глава 6. Постановка задачи оценивания состояния технологического процесса.....	109
6.1 Постановка задачи оценивания .....	109
6.2 Фильтр Калмана-Бьюси и его применение.....	112
6.2.1 Понятие о фильтре Калмана-Бьюси (ФКБ).....	112
6.2.2 Алгоритм и блок-схема расширенного фильтра Калмана-Бьюси (для процессов с распределёнными параметрами) .....	113
6.2.3 Пример оценивания состояния объекта с распределёнными параметрами с использованием фильтра Калмана-Бьюси .....	114

Глава 7. Идентификация как метод построения и коррекции математических моделей.....	121
7.1 Представление об идентификации. Этапы развития теории идентификации .....	121
7.2 Идентификация и методы моделирования .....	123
7.3 Этапы решения задачи идентификации.....	125
7.4 Понятие о типовой идентификации .....	127
7.5 Постановка задачи параметрической идентификации. Понятие об адаптивной и неадаптивной идентификации .....	131
7.6 Понятие о методе наименьших квадратов. Алгоритмы метода наименьших квадратов (МНК).....	134
Глава 8. Постановка задачи оптимизации и задача оптимального управления .....	141
8.1 Постановка задачи оптимизации в подсистеме оптимального управления .....	141
8.2 Роль математической модели в задаче оптимального управления.....	142
8.3 Задача «о такси».....	144
8.4 Сведение вариационной задачи оптимального управления к задаче математического программирования.....	146
8.5 Понятие «пространства состояний» .....	148
8.6. Наиболее часто используемые критерии качества управления динамическими объектами .....	149
8.7 Задача оптимизации распределённого технологического процесса с использованием линейного программирования .....	150
Глава 9. Системы диагностики и роль математического моделирования.....	155
9.1 Определение систем диагностики. Классификация систем диагностики. Их место среди информационно-управляемых систем и технологий.....	155
9.2 Отличительные особенности моделирования TDM-систем от систем автоматического управления (САУ).....	156
9.3 Статическая модель объекта наблюдения. ....	156
9.4 Статическая модель системы контроля, диагностики и мониторинга технического состояния двигателя дымососа.....	158

Глава 10 . Высокотемпературная диагностика в энерготехнологиях.....	160
10.1 Физические основы ИК-пирометрии (основные законы излучения).....	160
10.2 Особенности ИК-диагностики температурного состояния объекта, экранированного продуктами сгорания.....	162
10.3 Измерение температуры поверхности материала с использованием двух пирометров.....	165
Заключение.....	172
ГЛОССАРИЙ.....	173
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	175

## Введение

В современных условиях, когда в ряде отраслей промышленности происходят достаточно интенсивные процессы модернизации и реконструкции, роль систем управления и в том числе автоматизированных систем существенно возрастает. Существенно возрастают требования к качеству продукции, что налагает дополнительные условия работы автоматизированных систем. При этом период, в котором определённую роль играют локальные (узловые) системы автоматического управления, а также автоматического регулирования (так называемый, базовый уровень управления), активно дополняется верхним уровнем управления – уровнем АСУ ТП и ИУС (автоматизированных систем управления технологическим процессом и информационно-управляющих систем). Как известно, важнейшим принципом этого верхнего уровня АСУ ТП является то обстоятельство, что задатчики локальных регуляторов уже не находятся полностью во власти оператора, а управляются с использованием компьютерных программ и управляющих вычислительных машин. Как правило, при этом речь идёт о достаточно сложных системах управления, системах с распределёнными параметрами, многомерных и т.д. В последнее время возможности компьютерного программного обеспечения АСУ ТП существенно расширились. Однако, с нашей точки зрения, возможности дальнейшего продвижения в области АСУ ТП часто существенно сдерживаются отсутствием достаточно представительных математических моделей, способных работать в режиме реального времени (on line). В определённой мере это относится и к базовому уровню управления, в котором выбор регуляторов и их настроек в значительной степени зависит от структуры и параметров модели объекта управления. Роль математических моделей уже более высокого уровня (в нашей трактовке это имитационно-оптимизирующий уровень) возрастает и в связи с необходимостью создания, так называемых, виртуальных объектов управления – для использования в предпроектных исследованиях систем управления (отработки моделей реального времени, настройки подсистем АСУ ТП и т.д.).

В связи с этим проблемы математического моделирования объектов управления приобретает всё большую актуальность. Эти вопросы проходят красной линией во многих учебных курсах, так или иначе связанных с автоматическим управлением, таких как теория автоматического управления, моделирование систем, моделирование и идентификация и т.д.

В известной трактовке Б. Я. Советова в учебном курсе «Моделирование систем» системы автоматического управления, например, представлены как непрерывно-детерминированные математические схемы (Д-схемы) и им уделено достаточное внимание в плане специфики поставленных задач моделирования для этих Д-схем.

Однако, с нашей точки зрения, в практических вопросах математического моделирования для систем управления, да и в имеющихся учебных материалах не сложилось достаточно чёткое представление о соотношении стохастических и детерминированных подходах при наработке математических моделей. Для целей автоматического управления часто в учебных курсах большое внимание уделяется стохастическим методам и, в частности, методам идентификации. Однако уже становится очевидным, что применительно к сложным объектам проведение таких этапов математического моделирования как разработка топологии и структуры моделей не представляется возможным с использованием чисто стохастических методов. Значительную роль здесь играют уже сложившееся в автоматическом управлении структуры моделей (в виде, например, передаточных функций для линейных моделей, регрессивных моделей и т.д.) или те или иные детерминированные представления. В этом плане значительную роль в сочетании детерминированного и стохастических подходов начинает играть, так сказать «ограниченная» идентификация, которую определяют, например как параметрическая идентификация.

Для систем автоматического управления возможности универсализации детерминированных представлений в применении к самым различным по своей природе объектам были заложены в работах Б. Н. Петрова с коллегами, обосновавшими, так называемый, обобщённый термодинамический подход. Обоснование этого подхода относится к 70-м годам прошлого столетия и, в какой-то мере, его становление проходило параллельно с развитием методов идентификации в теории управления.

Это же касается имитационно-оптимизационного уровня в АСУ ТП, который в основном соотносится с объектами с распределёнными параметрами, то в этом плане детерминированные подходы становятся доминирующими, но, однако, роль параметрической идентификации и при этом нельзя исключать.

Таким образом, основной особенностью данного учебного пособия является представление современных методов моделирования для автоматизированного управления в тесной гармонической связи детерминированных и стохастических подходов. В этом аспекте авторы накопили определённый опыт, частично представленный в списке литературы. Материалы данного учебного пособия являются результатом многолетнего сотрудничества представителей Уральского государственного технического университета – УПИ и Новоуральского государственного технологического института в постановке таких учебных курсов как «Моделирование систем», «Теория автоматического управления», «Управление и информатика в энергосбережении и экологии».

Авторы приносят глубокую благодарность администрации и членам коллективов за оказанную помощь и поддержку.

Все замечания по материалам данного пособия авторы примут с благодарностью.

# **Глава 1. Представление об АСУ, АСУП, АСУ ТП и ИАСУ. Принципы построения автоматизированных систем управления, включающих ЭВМ и оператора**

## **1.1. Некоторые даты и временные интервалы**

В современных условиях, как отмечалось во введении, роль автоматизированных систем заметно возрастает. В этом плане уместно отметить некоторые этапы развития этих систем, важные с нашей точки зрения, а также даты появления основополагающих в этом плане работ.

1930-1960 гг. – ускорение развития ЛСАР (локальных систем автоматического регулирования).

1948 г. – издана книга Норберта Винера «Управление и связь в животном и машине», первое упоминание и кибернетике начало и её развития.

1954 г. – советскими и американскими учёными была основана организация IFAC (International Federation of Automation Control).

1967 г. – симпозиум IFAC в Праге, обоснование науки об идентификации в автоматическом управлении.

60-е гг. XX века – начало развития АСУ П (автоматизированных систем управления производством), начинают отрабатываться принципы создания АСУ ТП.

1968 г. – Издание книги Б. Н. Петрова с коллегами «Теория моделей в процессах управления».

1983 г. – Издание в СССР книги У. Рея «Методы управления технологическими процессами», в которой приведено детальное обоснование основных функций АСУ ТП.

80-е гг. XX века – возникает необходимость создания ИАСУ (интегрированных автоматизированных систем управления) и начинаются работы в плане их реализации.

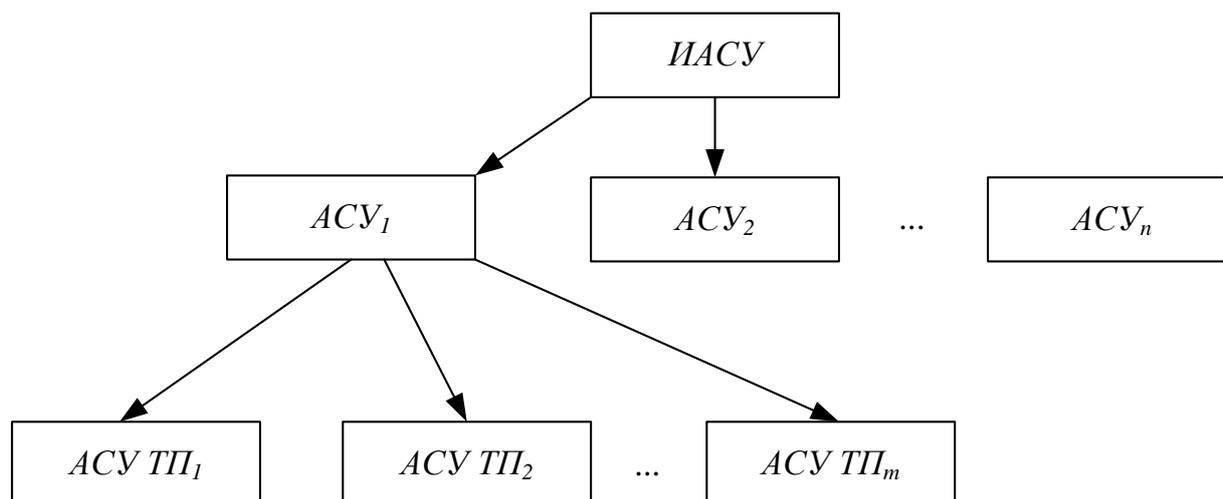


Рис. 1.1. Структура интегрированной АСУ.

Характерными признаками ИАСУ является органическое сочетание при создании автоматизированных систем управления, систем управления производством (АСУ П) и систем управления технологическими процессами (АСУ ТП). В виде упрощённой схемы структура современных ИАСУ представлена на рис. 1.1.

Таким образом, ИАСУ условно можно представить в виде некоторой суммы:

$$\text{ИАСУ} = \text{АСУ П} + \text{АСУ ТП}$$

## 1.2 Основные функции АСУ П и АСУ ТП. Принципы построения АСУ ТП

Остановимся кратко на основных функциях АСУ П и АСУ ТП.

Основные функции АСУ П:

1. Сбор и обработка информации о производственном процессе, в основном, технико-экономического плана (заказы, производительность, качество, ресурсы, кадры, экология).
2. Представление этой информации в удобном для управления виде для административного персонала.

Основные функции АСУ ТП:

1. Сбор и обработка информации технологического характера (информация о параметрах состояния процесса: Т – температура, Р – давление, G – расход, Н – влажность, рН, с – концентрация, R – радиоактивность, w – скорость, a – ускорение, L – уровень и т.д.).
2. Использование этой информации для управления технологическим процессом в автоматизированном режиме по принципу отрицательной обратной связи.

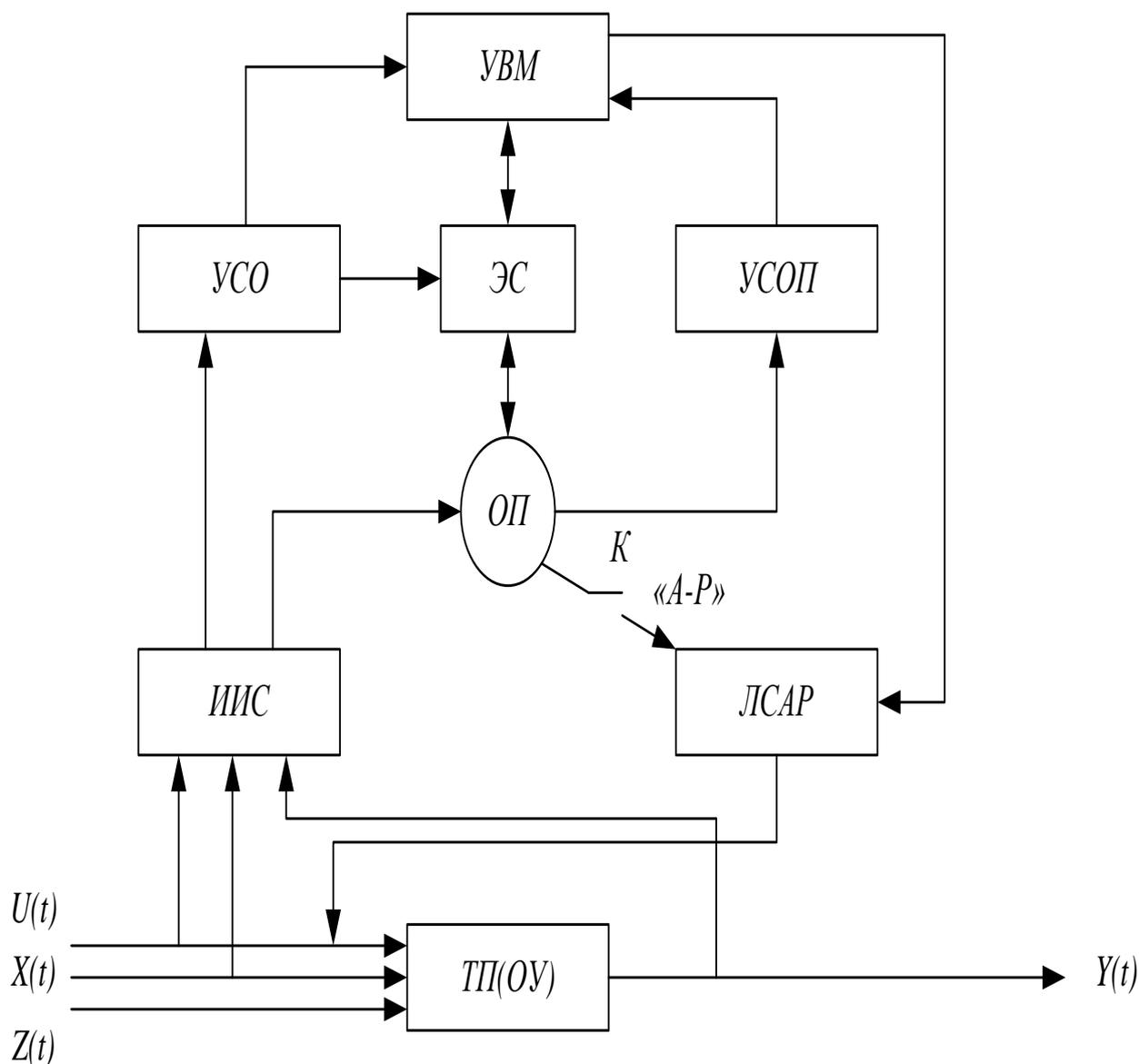


Рис. 1.2. Структурная схема АСУ ТП: УВМ – управляющая вычислительная машина; ЭС – экспертная система; УСОП – устройство связи с оператором; К – ключ(переключатель), «А-Р» – «автомат – ручное» (управление); ЛСАР – локальная система автоматического регулирования; УСО – устройство связи с объектом управления; ИИС – информационно - измерительная система; ОУ – объект управления или технологический процесс ТП;  $U(t)$  – управляющее воздействие;  $X(t)$  – контролируемое возмущающее воздействие;  $Z(t)$  – неконтролируемое возмущающее воздействие;  $Y(t)$  – вектор выходных величин (параметров) объекта.

Таким образом, основным характерным признаком АСУ ТП следует считать наличие управляющей вычислительной машины для управления регуляторов локальных САР, и наличие оператора в контуре управления.

Отметим также следующие характерные особенности АСУ ТП (см. рис. 1.2).

1. Наличие УВМ и оператора ОП одновременно;
2. Обязательное наличие локальных систем автоматического регулирования (ЛСАР) (по количеству локальных узлов управления их может быть  $N$ );
3. Наличие разветвленной информационно-измерительной системы (ИИС) (датчики, измерительные приборы, диспетчерские пункты);
4. Основная функция управляющих вычислительных машин и оператора (УВМ и ОП) – оптимальное управление процессом с использованием ЛСАР;
5. Основные функции оператора (ОП):
  - Взаимодействие с экспертной системой (ЭС) и через УСОП с УВМ – ручной ввод данных (часть данных автоматически снимается с датчика), корректировка программного обеспечения, и т.д.;
  - При этом экспертная система часто работает в режиме советчика;
  - Важнейшая роль оператора – предотвращение опасных и аварийных ситуаций, которые потенциально могут возникать по ходу технологического процесса и при работе автоматического оборудования, в наиболее сложной обстановке. В соответствии с технологической инструкцией оператор может перейти в режим ручного управления через ключ К «автомат – ручное». Конечно, и просто техническое обслуживание всей системы.

Основные функции АСУ ТП представлены на рис. 1.3 (более подробные данные представлены в последующем материале).

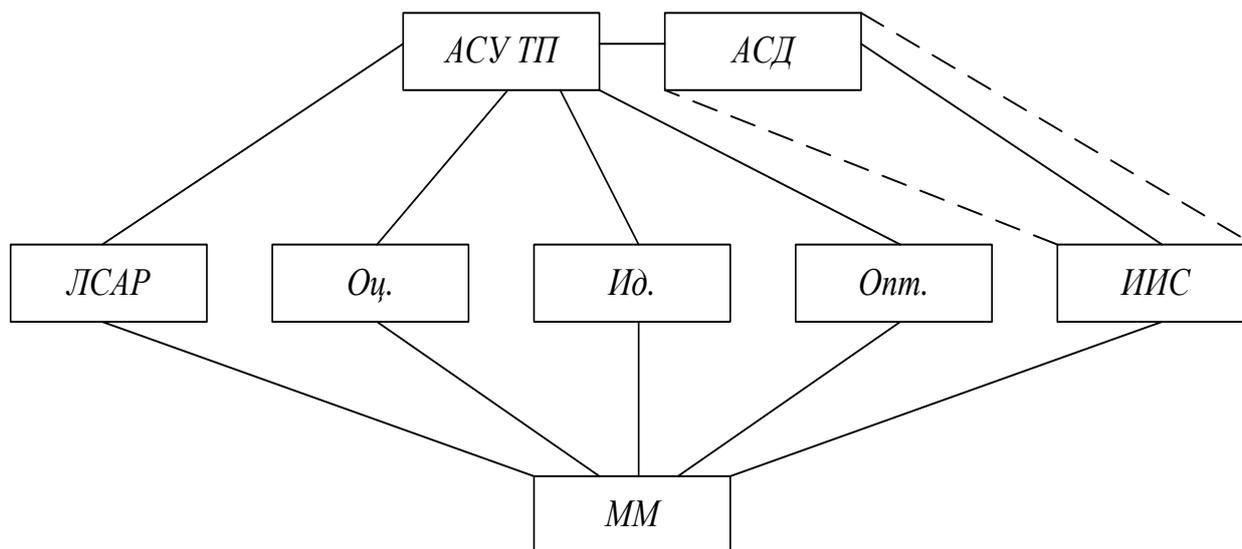


Рис. 1.3. Основные функциональные блоки подсистемы АСУ ТП: *ЛСАР* – локальная система автоматического регулирования; *ИИС* – информационно-измерительная система; *АСД* – автоматическая система диагностики; *Оц.* – система оценивания; *Ид.* – система идентификации; *Опт.* – система оптимизации; *ММ* – математическая модель.

Сформулируем кратко основные функции данных подсистем:

1. *ИИС* – обеспечивает измерение входных и выходных параметров объектов управления и отображение их в удобном для процессоров управления виде;
2. *ЛСАР* – осуществляет автоматическое регулирование выходных параметров в рамках поузловой автоматики;
3. Подсистема оценивания – определяет истинное значение выходных параметров объектов, необходимых для процессов управления;
4. Подсистема идентификации – обеспечивает формирование и корректировку математических моделей объектов с использованием вероятностных методов и активных экспериментов;
5. Подсистема оптимизации – обеспечивает управление объектом с использованием критериев оптимальности.
6. Подсистема диагностики – даёт оценку состояния параметров объектов или системы (режимы и конструктивные параметры) с целью определения надёжности и ресурса функционирования объектов и систем.

Алгоритмической базой всех этих подсистем является комплекс математических моделей (*ММ*), представленных в той или иной формах.

### 1.3 Структура локальной системы авторегулирования (*ЛСАР*), её место в АСУ ТП. *ЛСАР*, работающие по отклонению и по программе

Важнейшим, базовым элементом АСУ ТП является локальная система автоматического регулирования (рис. 1.4).

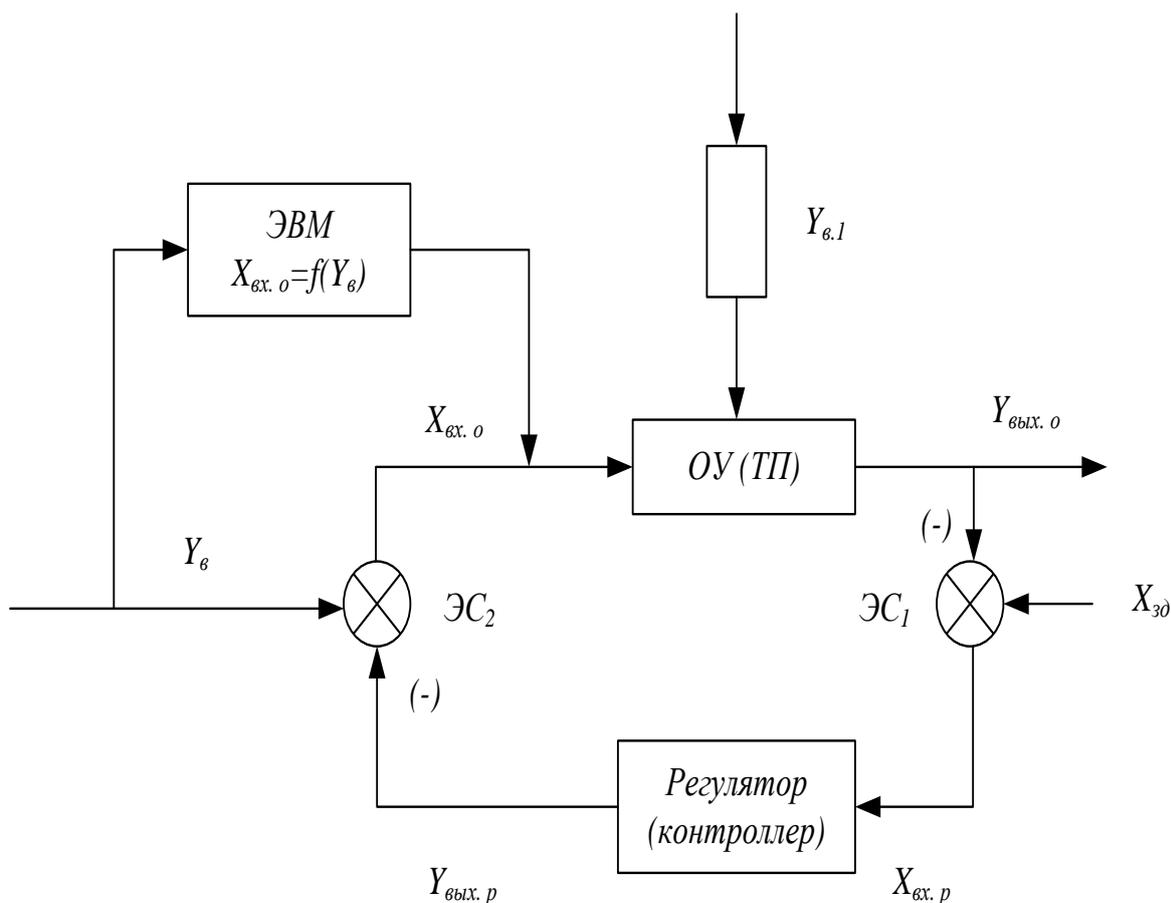


Рис. 1.4. Структура локальной системы автоматического регулирования (ЛСАР) (на примере одноконтурной замкнутой САР): ЭС<sub>1</sub> – элемент сравнения (сравнивает выходную величину объекта  $Y_{вых.о}$  – с величиной  $X_{зд}$ , выработывая значение  $X_{вх.р} = Y_{вых.о} - X_{зд}$ ); ЭС<sub>2</sub> – второй элемент сравнения (сравнивает значение возмущающего воздействия  $Y_{в}$  и выходной величины регулятора  $Y_{вых.р}$ , выработывая значение  $X_{вх.о} = Y_{в} - Y_{вых.р}$ );  $X_{вх.о}$  – входная величина объекта ( $U(t)$  – это управляющее воздействие (изменение подачи энергии или вещества));  $Y_{вых.о}$  – выходная величина объекта или параметр состояния объекта ( $T, P$ , т.е. параметры состояния, требующие поддержания на заданном уровне);  $X_{вх.р}$  – входная величина регулятора;  $Y_{вых.р}$  – выходная величина регулятора, появляется при отклонении параметра от задания;  $Y_{в}$ ,  $Y_{в.1}$  – возмущающие воздействия; ОУ – объект управления (технологический процесс);  $X_{зд}$  – заданное значение параметра (выходной величины объекта);  $X_{вх.о} = Y_{в} - Y_{вых.р}$  – отрицательная обратная связь (для погашения возмущающего воздействия).

Как видно на рис. 1.4, входная величина регулятора:  $X_{вх.р} = Y_{вых.о} - X_{зд}$ . Входная величина регулятора – это отклонение параметра от заданного значения, т.е. такая система работает по отклонению (по причине наличия

возмущающих воздействий). Если  $Y_{ex.o} = X_{зд}$ , то регулятор не работает. Связь выходной величины регулятора с входной его величиной  $Y_{вых.p} = f(X_{ex.p})$  называют законом регулирования.

Приведём пример закона регулирования для распространённого на практике ПИД-регулятора (пропорционально-интегрального дифференциального регулятора):

$$X_{вых.p} = \overbrace{K_p (X_{ex.p})}^{\text{П}} + \overbrace{\frac{1}{T_n} \int_0^{\infty} X_{ex.p}}^{\text{И}} + \overbrace{T_d \cdot \frac{dX_{ex.p}}{dt}}^{\text{Д}}, \quad (1.1)$$

где  $K_p, T_n, T_d$  – настройки регулятора;

$K_p = 1/\delta$  – коэффициент усиления;  $\delta$  – степень неравномерности;

$T_n$  – постоянная интегрирования;

$T_d$  – постоянная дифференцирования;

$\text{П, И и Д}$  – пропорциональное, интегральное и дифференциальное звенья регулятора, соответственно.

Недостатком САР, работающих по отклонению, является возникновение динамических ошибок регулирования, особенно значительных при большой инерционности объектов регулирования.

Для улучшения работы САР по отклонению, дающих динамические ошибки регулирования, применяются регуляторы, работающие по программе, или системы с компенсацией по возмущению (см. рис. 1.4). При этом в схему ЛСАР добавлена ЭВМ, в которую вводятся величины  $Y_g$  и  $X_{ex.o}$ . В ЭВМ предусмотрена программа, связывающая величины  $Y_g$  и  $X_{ex.o}$ , т.е. при этом входная величина объекта равна  $X_{ex.o} = f(Y_g)$ .

Система, работающая по программе, фиксирует изменения возмущающего воздействия и с использованием программы вырабатывает входную величину объекта.

Возможным недостатком систем, работающих по программе, является несовершенство алгоритмов, связывающих входную величину объекта  $X_{ex.o}$  с возмущающим воздействием, отсутствие учёта некоторых возмущающих воздействий и т.д.

Применяются и комбинированные системы, работающие как по отклонению от задания, так и по программе.

Подводя итоги, можно несколько упрощённо определить, что ЛСАР задатчиками управляет оператор, но в АСУ ТП оператор выполняет другие функции, а в системе находится УВМ, которая и управляет задатчиками ЛСАР.

## Глава 2. Понятие о современной теории автоматического управления (СТАУ) и функциональная структура современной АСУ ТП

### 2.1 Основные задачи СТАУ

Выделим некоторые термины, принятые в ТАУ и СТАУ.

**Автоматическое регулирование** – это поддержание (стабилизация) какого-либо технологического параметра на заданном уровне с помощью регулирующего устройства.

**Регулирующее устройство** – локальный регулятор, реализующий заранее выбранный закон регулирования.

Законы регулирования:

- Классические ( типовые):
  - П – пропорциональный;
  - ПИ – пропорционально-интегральный закон;
  - ПИД – пропорционально-интегральный дифференциальный закон;
- для особо сложных объектов законы могут быть синтезированы на основе классической теории управления ТАУ.

**Управление** – это принятие решения о том, каковы должны быть значения задаваемых величин (уставок) локальных регуляторов.

В тех случаях, когда имеют место существенные динамические возмущения на входе объекта управления, возникает задача выбора оптимального набора заданий (уставок) для регуляторов. Эта задача решается на базе теории оптимального управления. Системы авторегулирования (ЛСАР), как правило, задействованы при управлении объектами с сосредоточенными параметрами, однако технологические процессы в подавляющем большинстве являются объектами с распределёнными параметрами.

Можно например считать, что авторегулирование – это управление объектами с сосредоточенными параметрами, все возникающие здесь проблемы решаются с помощью классической ТАУ.

При управлении распределёнными во времени и пространстве процессами используют основные фундаментальные разделы СТАУ.

Что же означает определение «современная»? В отличие от классической ТАУ, объектом изучения которой являются, как правило, одномерные системы (один вход – один выход), описываемые линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, СТАУ содержит результаты, применимые для различных классов общих многомерных систем, включая системы, задаваемые:

1. линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами;
2. нелинейными дифференциальными уравнениями;

3. дифференциально-разностными и другими уравнениями с последствием;

4. уравнения с частными производными и интегральными уравнениями.

### **СТАУ включает следующие разделы:**

– *теорию оптимального управления*, с помощью которой можно разрабатывать оптимальные системы, при функционировании которых минимизируется или максимизируется некоторый выбранный заранее критерий качества (критерий качества – формализованная экстремальная цель управления) или система критериев – многокритериальная оптимизация;

– *алгоритмы идентификации процессов*, позволяющие определить структуру модели объекта управления и восстанавливать параметры этой модели, в том числе и в темпе с процессом (real-time, on line);

– *оценивание состояний* – это определение текущих значений таких координат состояния процесса, которые не могут быть измерены непосредственно или могут быть измерены лишь с большими помехами. При построении информационно-измерительной системы особенно полезны методы оценивания текущего состояния для тех процессов, для которых затруднено непосредственное измерение параметров, недостаточно измерительных устройств или очень велика цена отдельных измерений.

Основные функции современных АСУ ТП, соответствующие уже задачам СТАУ были в своё время определены американским профессором У. Реем, в следующем параграфе представлена функциональная структура АСУ ТП, включающая основные подсистемы и определяющая структуру и взаимосвязи в современной АСУ ТП.

## 2.2 Функциональная структура современной АСУ ТП (схема У. Рея)

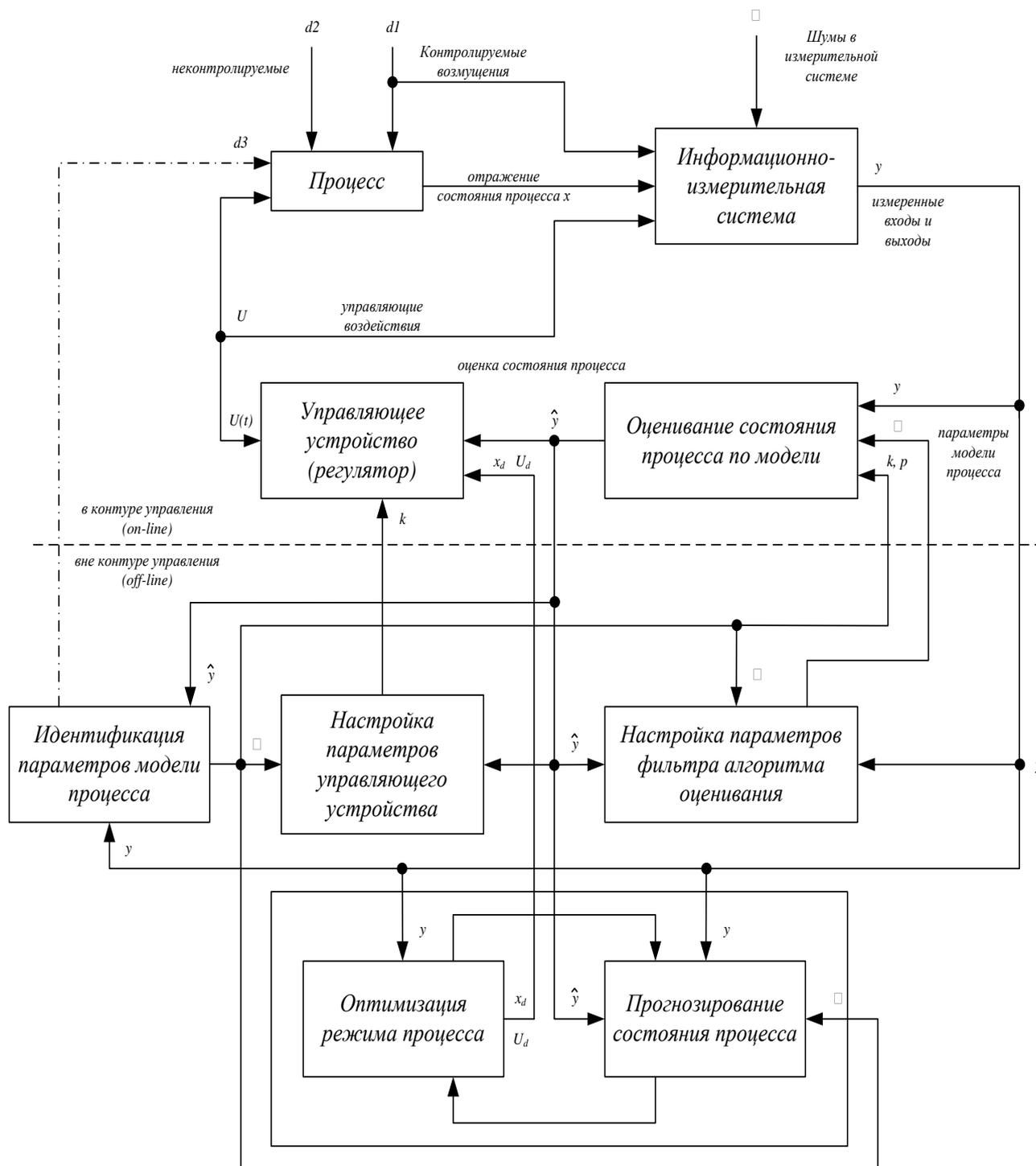


Рис. 2.1. Функциональная схема современной АСУ ТП (схема У. Рея).

Рассмотрим процесс управления на представленной схеме и функции имеющихся подсистем.

Процесс определяется как диагностируемый и управляемый. Величины на входе (рис. 2.1):

$d1$  – вектор контролируемых возмущений (технологический регламент: производительность, требования к конечной продукции, характеристики сырья, технологические ограничения);

$U$  – вектор управляющих воздействий;

$d2$  – вектор неконтролируемых возмущений (трудно организовать всеобъемлющий контроль входных величин объекта);

$d3$  – вектор активных вспомогательных идентифицирующих воздействий (используется при активной идентификации для коррекции математической модели (ММ) объекта).

На выходе объекта имеем вектор  $y$  – вектор выходных величин наблюдения за процессом (показания датчиков);

$\hat{y}$  – вектор фактического состояния процесса;

$\alpha$  – параметры модели процесса.

### **Функции отдельных подсистем АСУ ТП.**

#### **ИИС (информационно-измерительная система).**

Обеспечивает контроль параметров состояния процесса (вектор  $y$ ) в условиях помех ( $\eta$  – вектор измерительных помех), а также контролирует величины  $d1$  и  $U$ , т.е. принимает всю информацию о процессе. ИИС также осуществляет системную обработку полученной информации (предварительная фильтрация измерительной информации  $y$ , системная обработка величин  $d1$  и  $U$  в виде формирования баз данных, анализ во времени всей информации, систем отображения технологической информации в виде графиков, таблиц и т.д.) На выходе подсистем имеем вектор  $y$ , который представляет собой упорядоченный полный набор технологически измеренной информации о процессе.

#### **Подсистема оценивания текущего состояния процесса.**

По измеренным параметрам  $y$  и по модели процесса подсистема проводит оптимальную оценку состояния ( $\hat{y}$ ) процесса. Подсистема снабжена блоком настройки (адаптации), который осуществляет по мере необходимости настройку параметров алгоритма оценивания  $k$  и  $r$ .

#### **Подсистема параметрической идентификации.**

По результатам математической обработки измерений  $y$  и данных моделирования  $\hat{y}$  восстанавливает (переопределяет) вектор параметров модели  $\alpha$ . При этом может оказаться необходимым подавать дополнительно

на вход процесса специальным образом сформированные вспомогательные (идентифицирующие) входные воздействия – вектор  $d3$ .

#### **Подсистема оптимального управления.**

Эта подсистема обеспечивает принятие решения о том, какие значения уставок регуляторов  $x_d$  и управляющих воздействий  $U_d$ , являются оптимальными для управления процессом с учётом его динамики, текущего состояния  $\hat{y}$  и прогноза состояния вектора контролируемых возмущений  $d1$  на ближайшее будущее. В **блоке прогнозирования состояния процесса** с помощью ММ (управления) проводится цикл прогнозных расчётов, при этом на ММ проигрываются результаты различных пробных управлений. В **блоке оптимизации режима процесса** на основе информации об управляемости процесса (результат прогнозирования) проводится непосредственно решение оптимизации задачи с помощью выбранного метода её решения: математическое программирование, динамическое программирование (принцип Бэлмана), принцип максимизации. При выборе решения об оптимальном управлении используется ММ.

#### **Подсистема адаптивного регулирования (управляющее устройство).**

Для процессов с распределёнными параметрами эта подсистема представляет систему сопряжённых регулирующих устройств (регуляторов), отметим, что эта подсистема функционально не принимает решения, а отрабатывает, реализует оптимальные уставки, поэтому является вторичной, подчинённой **системе оптимального управления**. С учётом динамики всей системы в **блоке настройки параметров управляющего устройства** на основе анализа текущих знаний динамических характеристик процессов  $\alpha$  определяются оптимальные настройки к локальным регуляторов. Адаптация регулирующих устройств позволяет поддерживать на требуемом оптимальном уровне процессы регулирования (авторегулирования).

Таким образом, рассматриваемые выше подсистемы функционируют, как оптимальные (адаптивные) системы на основе соответствующих алгоритмов:

- оценивания,
- параметрической идентификации,
- оптимального управления, включая имитационное (прогнозирование) моделирование,
- алгоритмов адаптивного регулирования.

## **Глава 3. Математические модели и их основные разновидности применительно к процессам управления**

### **3.1 Методы построения математических моделей объекта для целей управления**

В процессе разработки современных управляющих и информационных систем центральное место занимает задача построения модели исследуемого объекта.

Как это принято, в зависимости от характера изменения параметров различают следующие типы моделей: детерминированные и стохастические, непрерывные и дискретные, стационарные и динамические.

Стохастическая модель строится в том случае, когда параметры объекта подвергаются воздействию случайных, неконтролируемых факторов. Однозначно предсказать поведение такого объекта невозможно, поэтому при изучении стохастических моделей применяют методы теории вероятностей и математической статистики, в частности достаточно популярен байесов подход к моделированию и подход, основанный на анализе временных рядов. В рамках стохастического моделирования, составляющего, в принципе, основу теории идентификации, пожалуй, самым популярным подходом к изучению сложных объектов является представление его в виде «серого ящика». В отличие от абстракции «черного ящика», которая состоит в допущении полного отсутствия априорной информации о внутренней структуре объекта, что на практике бывает крайне редко, «серый ящик» допускает, что некоторая информация об объекте все же присутствует, но знаний о нем недостаточно. Априорная информация может содержать данные о множестве факторов, некоторых особенностях конструкции технологического оборудования, протекающих процессах (такие модели особенно распространены при описании физических процессов) и т.п. Апостериорной информацией для исследуемого объекта являются измеряемые одновременно входные и выходные переменные, являющиеся функциями времени. По результатам измерений строится модель объекта, то есть находится оценка оператора, ставящего входную функцию в соответствие с выходной функцией. Очевидно, что говорить о соответствии между моделью и объектом можно только в том случае, если оценка оператора близка в некотором смысле к истинному значению этого оператора. Критериями близости выходных переменных объекта и модели могут служить, например, максимальная абсолютная разность между выходами модели и объекта, среднеквадратическое отклонение и др. В большинстве практических случаев в качестве критерия близости выбирают минимум средней квадратической ошибки.

При построении модели объекта ее структура определяется либо на основании априорной информации, например знания природы физических

процессов, протекающих в объекте, либо получается после предварительного сбора данных и их статистической обработки.

Так, например, в системе диагностики состояния технологического процесса непрерывного литья заготовок алюминиевой фольги, модель описывает зависимости показателей качества выпускаемой продукции от параметров технологического процесса и используется для определения необходимых технологических параметров по показателям качества продукции. В ходе построения и применения модели откликами назывались показатели качества изготавливаемой продукции, а факторами - независимые параметры технологического процесса, оказывающие существенное влияние на качество.

Для построения детерминированных математических моделей в теории управления используется обобщенный термодинамический подход (ОТП), опирающийся на прямое использование законов физики. Академик Петров Б.Н. с коллегами развил ОТП в книге «Применение обобщенного термодинамического подхода при составлении моделей объектов управления». Профессор Яковлев В.Б. (Санкт-Петербургский Государственный Электротехнический Университет (ЛЭТИ)) развивал использование ОТП для построения моделей с сосредоточенными параметрами. Профессор Лисиенко В.Г. (Уральский Государственный Технический Университет – УПИ) развил ОТП для построения моделей с распределенными параметрами.

Подразделение моделей на непрерывные и дискретные определяется характером области допустимых значений параметров модели. Модель называется стационарной, если ее параметры не изменяются во времени, иначе она называется динамической. Построение модели любого типа всегда связано с некоторой идеализацией объекта, при которой подчеркиваются существенные особенности его функционирования. На всех этапах построения модели объекта используется единообразный математический язык. Математические модели могут быть очень сложными, и то обстоятельство, что они записаны на математическом языке, позволяет исследовать их с помощью ЭВМ.

### **3.2 Математические модели и модели управления**

**Математическая модель (ММ)** – это система уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных, линейных и нелинейных), которая достаточно полно отражает наиболее характерные черты и особенности ОУ и ТП в соответствии с целями автоматизированного управления процессом.

Пример линейной математической модели с запаздыванием 2-го порядка:

$$a_1 \frac{d^2 y_{\text{вых}}}{dt^2} + a_2 \frac{dy_{\text{вых}}}{dt} + a_3 y_{\text{вых}} = a_4 x_{\text{вх}}(t - \tau_{\text{зан}}). \quad (3.1)$$

В операционной форме это дифференциальное уравнение преобразуется к виду:

$$a_1 p^2 Y_{\text{вых}}(p) + a_2 p Y_{\text{вых}}(p) + a_3 Y_{\text{вых}}(p) = a_4 X_{\text{вх}}(p) e^{-p\tau_{\text{зан}}}. \quad (3.2)$$

Передаточная функция равна:

$$W(p) = \frac{Y_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \frac{a_4 e^{-p\tau_{\text{зан}}}}{a_1 p^2 + a_2 p + a_3}, \quad (3.3)$$

**Модель управления** – это математическая модель процесса (объекта), дополненная системой равенств и неравенств, характеризующих критерии оптимальности и условия ограничения.

Пример критериев оптимальности:

$E$  – расход энергетических ресурсов,  $E = \min E = E_{\min}$ ;

$O_k = \min O_k$  – количество окалины образующееся при нагреве металла для целей обработки давлением;

$P = \max P$  – производительность;

$t = \min t$  – время процесса;

$\Delta$  – прибыль (для капиталиста),  $\Delta = \max \Delta$ , но бывают и ограничения  $\Delta = \Delta_{\text{норма}}$ .

Многокритериальные задачи часто формулируются с помощью комплексного критерия оптимальности, например в форме:

$$K_{\text{к.м.л.}} = AE + BP + CK_{\text{кан}} = \min K_{\text{к.м.л.}}, \quad (3.4)$$

где  $E$  – расход топлива;

$P$  – производительность;

$K_{\text{кан}}$  – капитальные затраты;

$A, B, C$  – весовые коэффициенты.

### Ограничения.

Ограничения связаны с технологическими характеристиками ОУ и ТП, с требованиями окружающей среды, например, это ограничение скорости движения транспорта в черте города  $w_{\text{тр}} \leq 60$  км/ч.

Например, если имеется ограничение  $Y_{\text{вых}} \leq Y_{\text{вых1}}$ , то из представленного графика (рис. 3.1.) следует, что при оптимизации процесса и будет выбрана величина  $Y_{\text{вых1}}$ , хотя эта величина меньше величины оптимального значения  $Y_{\text{вых}} < Y_{\text{вых.опт}}$ .

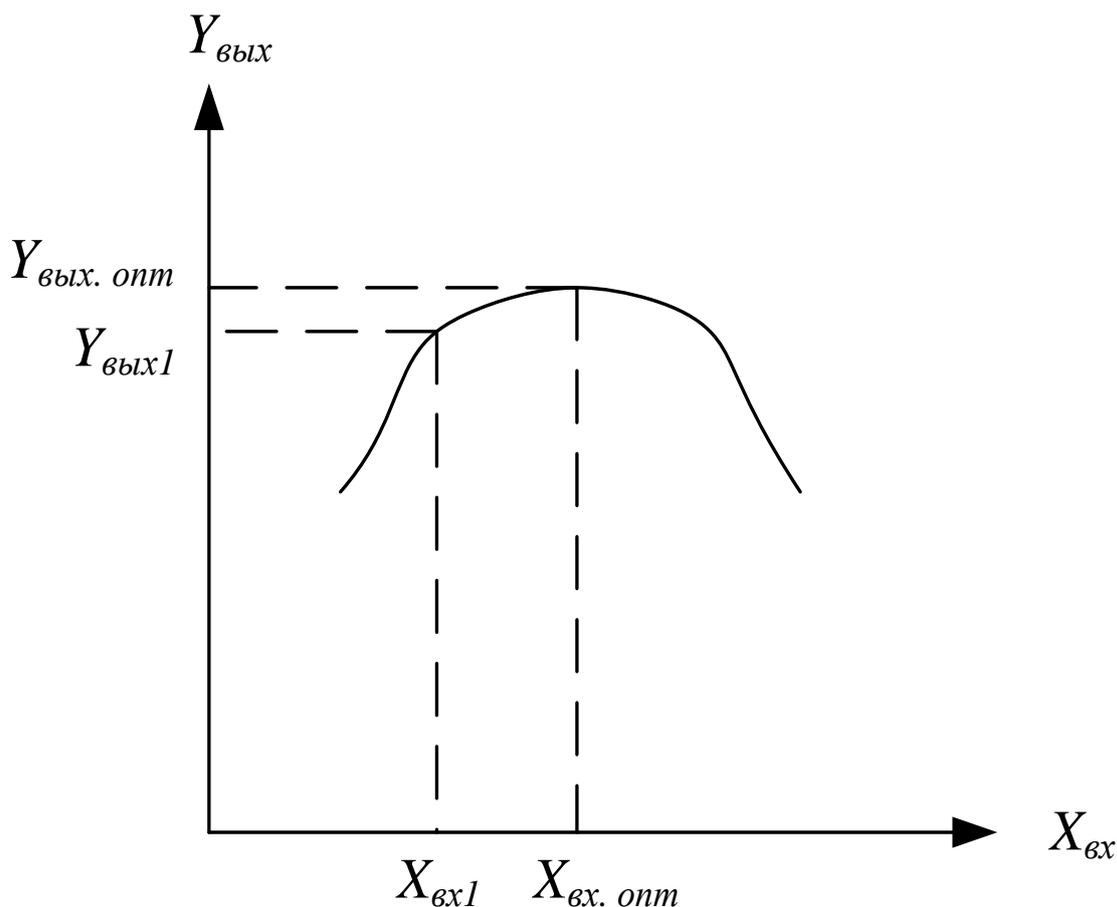


Рис. 3.1. Статическая характеристика объекта с экстремумом функции.

### Логические модели.

Логические модели – это модели, в которых применяем аппарат логики. Примером может служить, троичная логика в форме  $\langle = \rangle$  – «меньше», «равно», «больше»; пятеричная логика в форме  $\langle\langle < = > \rangle\rangle$  – «много меньше», «меньше», «равно», «больше», «много больше».

Пример логической таблицы состояний объекта управления. В этой таблице  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – рули – входные управляющие воздействия, величины  $b_1, b_2, b_3$  – параметры состояния процесса

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
$>$	$=$	$<$	$=$	$>$
$<$	$<$	$>$	$>$	$=$

При этом, например, общее число состояний процесса определяется при троичной логике и пяти величинах в логической таблице формулой  $K_{cост} = 3^5 = 243$ .

## **Нечеткая логика.**

В этом случае вводятся функции принадлежности, задается диапазон изменения параметра вместо его точного значения.

Пример:  $1000\text{ }^{\circ}\text{C} < t < 1500\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

В теории моделирования существуют такие понятия как эвристические и феноменологические модели.

Эвристические модели применяются, в тех случаях, когда отсутствуют априорные данные об объектах. Эти модели оформляются в виде гипотез, предположений.

Феноменологические модели формируются следующим образом: закономерности известного объекта применяют для описания неизвестного объекта. Таким образом, используется метод аналогии, т.е. приемы, методика моделирования ОУ и ТП, при которых различные по своей природе объекты описываются одними и теми же уравнениями.

Используется представление о виртуальном объекте – это объект, который представлен математической моделью и применяется для исследования процессов управления с применением ЭВМ.

### **3.3 Основные этапы моделирования в классическом представлении**

Основные этапы моделирования представляются в следующей последовательности при разработке моделей:

- концептуальная модель
- топология модели;
- структура модели;
- параметры модели.

#### **Понятие о концептуальной модели.**

**Концептуальная модель** – своеобразное техническое задание на составление математической или логической модели, в котором формулируются основные цели и принципы построения математической модели объекта.

Часто используется вербальная (словесная) форма выражения основных принципов построения модели.

Таким образом, концептуальная модель включает следующие элементы (рис. 3.2):

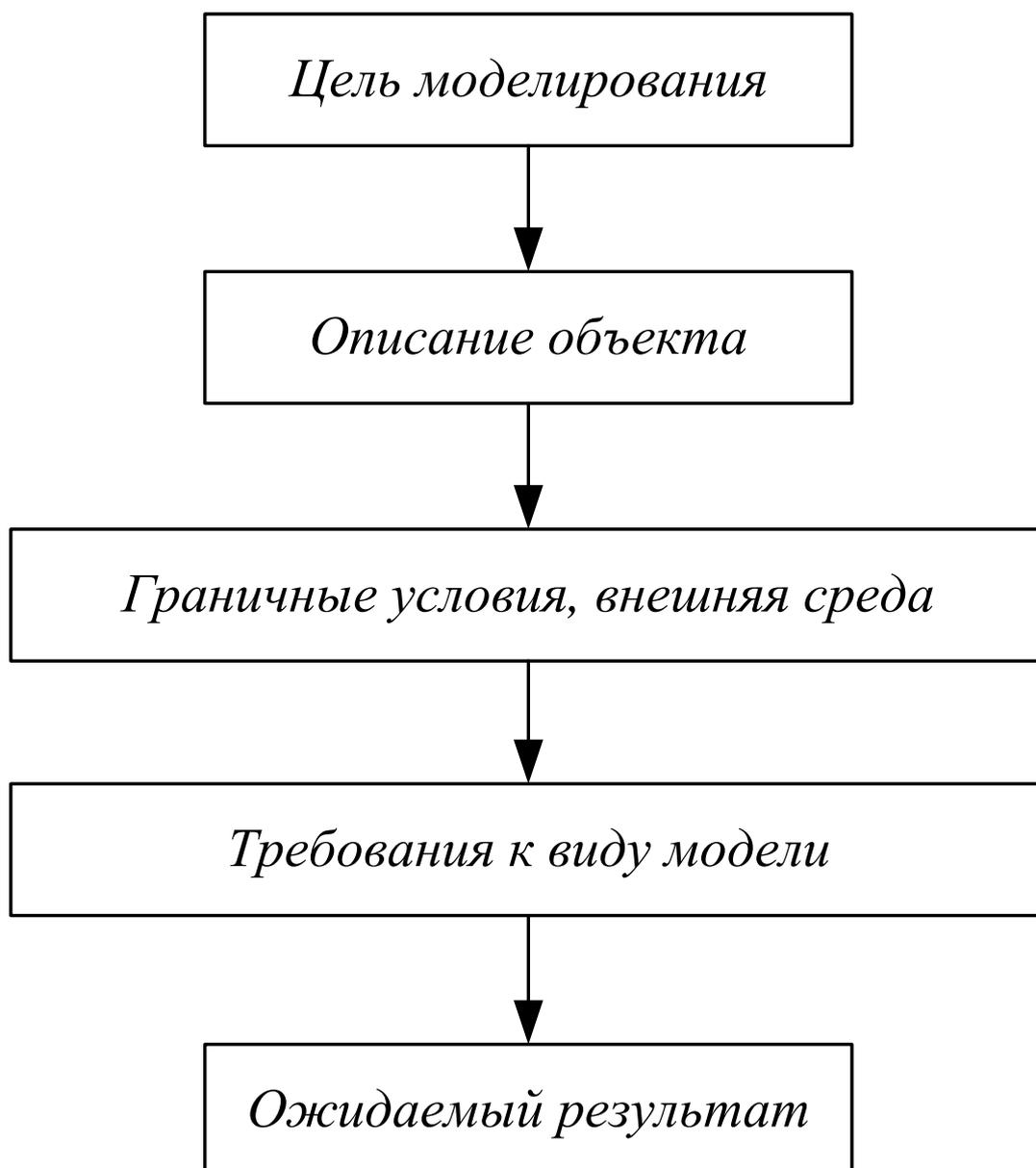


Рис. 3.2. Схема содержательных элементов при составлении концептуальной модели.

### **Топология модели**

**Топология модели** – это выявление основных входных и выходных величин объекта управления и установление наличия связи между ними. Топология модели хорошо отображается через статические характеристики объекта.

Статическая характеристика объекта представляет собой связь выходных и входных величин объекта в установившемся состоянии  $Y(t) = f[X(t), t]$  при  $t \rightarrow \infty$ .

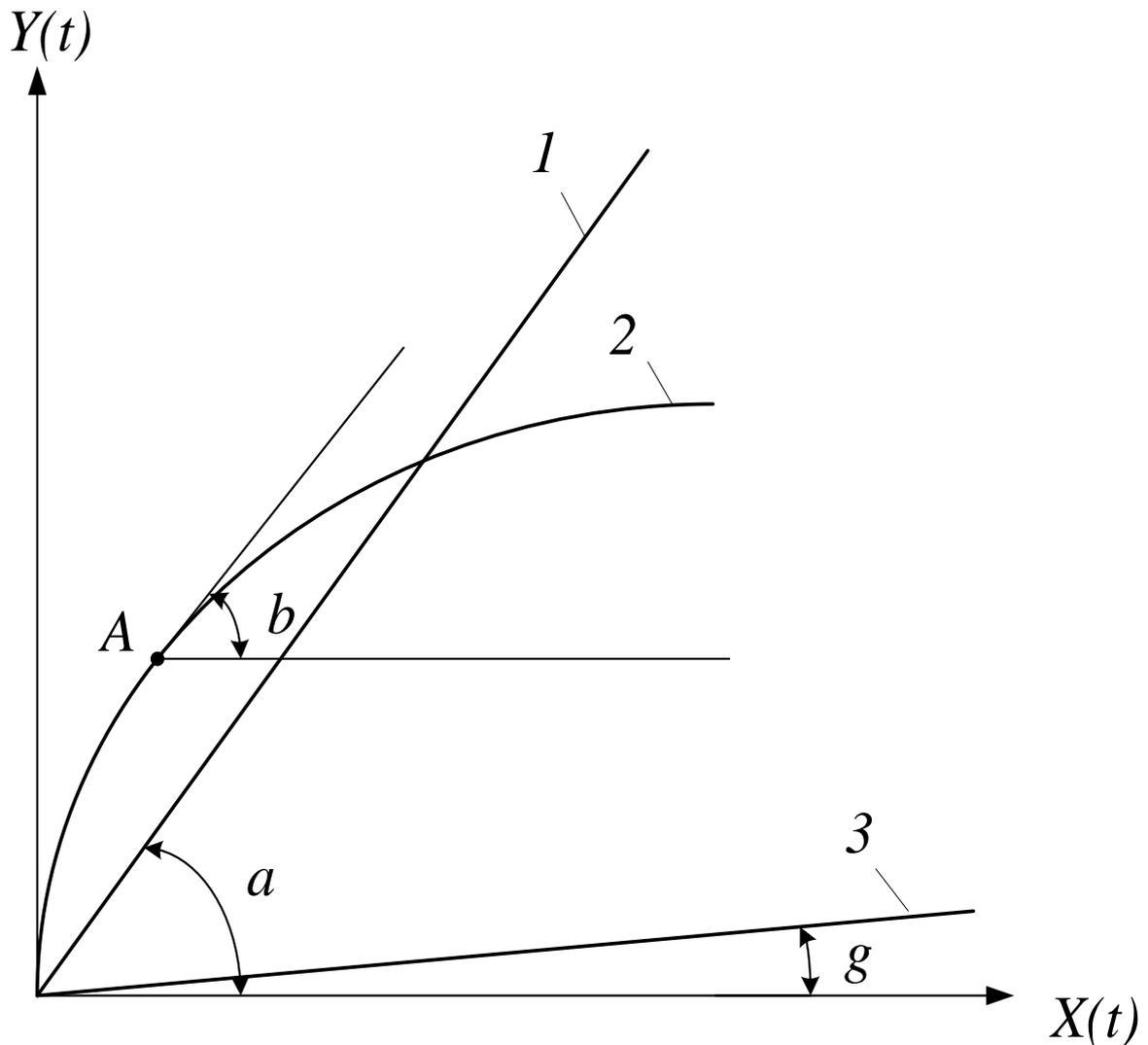


Рис. 3.3. Примеры характерных статических характеристик объектов управления: 1 – линейная значимая характеристика; 2 – нелинейная характеристика; 3 – линейная малозначимая характеристика.

Основным параметром статической характеристики является коэффициент усиления (передачи) объекта  $K_{yc}$ . Для различных зависимостей представленных на рисунке 3.3 имеют место следующие соотношения:

$$1. \quad Y(t) = K_{yc} \cdot X$$

$K_{yc} = \operatorname{tg} \alpha$ , чем больше величина  $K_{yc}$ , тем круче линия статической характеристики;

2.  $K_{yc} = \operatorname{tg} \beta = f(x)$  – это нелинейная характеристика. Угол – угол между касательной в данной точке кривой (точка А на кривой 1) и осью абцисс.

$$3. \quad \operatorname{tg} \gamma = K_{yc} \approx 0$$

Данная статическая характеристика свидетельствует об очень нечеткой связи входной и выходной величины.

Пример нелинейной характеристики, очень неудобной для автоматического регулирования, представлен на рис. 3.4 (типичная характеристика регулирующего органа – крана для жидкости).

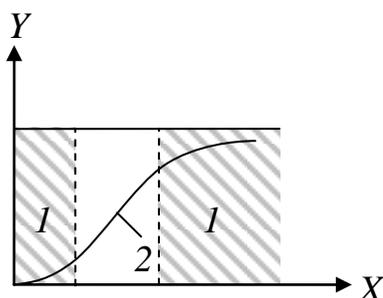


Рис. 3.4. Статическая характеристика с выраженными зонами нелинейности: 1 – зоны нелинейности; 2 – зона линейной характеристики.

### Структура математической модели

**Структура математической модели** – это уравнение или система уравнений (алгебраических, дифференциальных, в том числе в частных производных, интегральных, интегрально-дифференциальных), которые являются основой для составления математической модели данного объекта.

Структура математической модели, в принципе, конечно, может быть получена с использованием методов идентификации, но это возможно для сравнительно простых систем (статических, одномерных и т.д.).

Однако применительно к автоматизированному управлению уже, конечно, установились определённые структуры математических моделей в основном линейных, как в форме дифференциальных уравнений, так и в операционной форме (в виде передаточной функции  $W(p)$ ).

Характерные структуры математических моделей, принятые в автоматическом управлении:

1. Линейные модели – структурная форма представления (рис. 3.5 и 3.6)
  - 1.1 Одномерной модели.

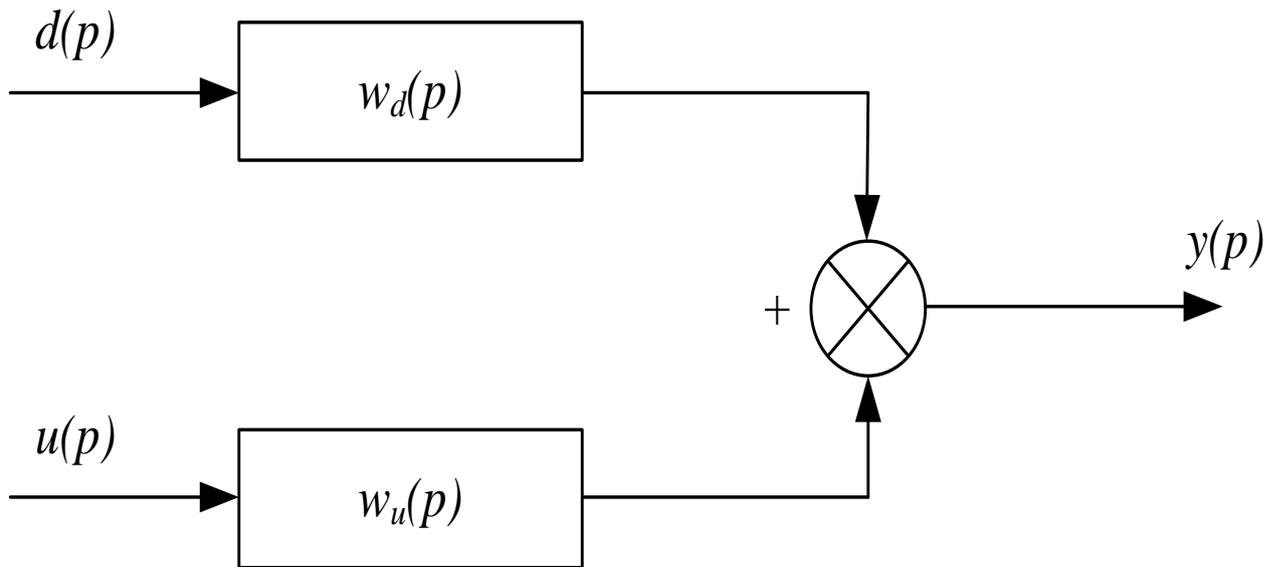


Рис. 3.5. Структура линейной одномерной модели системы:  $w_d(p)$ ,  $w_u(p)$  – передаточные функции;  $d(p)$  – возмущающее воздействие;  $u(p)$  – управляющее воздействие.

Структура модели имеет вид:  $y(p) = w_d(p) \cdot d(p) + w_u(p) \cdot u(p)$ .

### 1.2 Многомерные модели

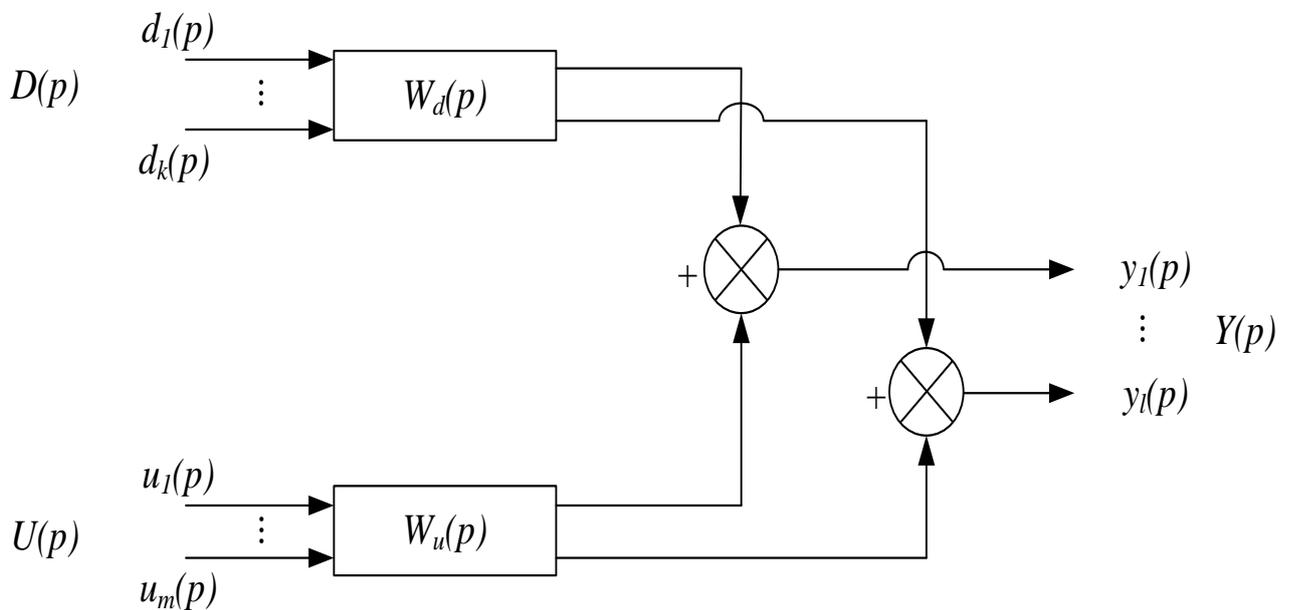


Рис. 3.6. Структура линейной модели многомерных систем.

При этом используется матричная форма записи параметров и передаточной функции:

$$Y(p) = \begin{bmatrix} y_1(p) \\ \vdots \\ y_e(p) \end{bmatrix}, \quad D(p) = \begin{bmatrix} d_1(p) \\ \vdots \\ d_k(p) \end{bmatrix}, \quad U(p) = \begin{bmatrix} u_1(p) \\ \vdots \\ u_m(p) \end{bmatrix}$$

$$W_d(p) = \begin{bmatrix} w_{d11}(p) & \dots & w_{d1k}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ w_{dl1}(p) & \dots & w_{dlk}(p) \end{bmatrix}$$

$$W_u(p) = \begin{bmatrix} w_{u11}(p) & \dots & w_{u1k}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ w_{ul1}(p) & \dots & w_{ulk}(p) \end{bmatrix}$$

Возможно также и представление уравнений в алгебраической форме:

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_j u_j + C_\beta d_\beta;$$

где  $y_\gamma = C_\gamma x_i$ ,

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$$

где

$$i = 1, \dots, n,$$

$$j = 1, \dots, m,$$

$$\beta = 1, \dots, k,$$

$$\gamma = 1, \dots, l.$$

В связи с этим отметим также принятые в автоматическом управлении модели так называемых элементарных звеньев:

1) Инерционное звено 1-го порядка

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1};$$

2) Инерционное звено второго порядка

$$W(p) = \frac{k}{T_1 p^2 + T_2 p + 1};$$

3) Интегральное звено

$$W(p) = \frac{k_u}{p};$$

4) Дифференциальное звено

$$W(p) = T_\delta p;$$

5) Звено чистого запаздывания

$$W(p) = e^{-p\tau_{зан}}.$$

## 2. Структура нелинейных моделей

Для этих моделей операционную форму представления уже нельзя применять, их можно представлять в форме дифференциальных уравнений и в других математических формах. Например, в обобщённой форме:

$$\dot{x} = f[u(t), x(t), d(t)];$$

$$y = \psi[x(t), y(t)].$$

### **Параметры и оценка параметров модели**

При этом, в частности, и с использованием методов параметрической идентификации проводится количественная оценка параметров состояния математической модели. Например, если

$$W(p) = \frac{k \cdot e^{-p \cdot \tau_{\text{зан}}}}{Tp + 1} \quad \text{— структура модели, то в параметрической}$$

форме это уравнение может иметь следующий вид:

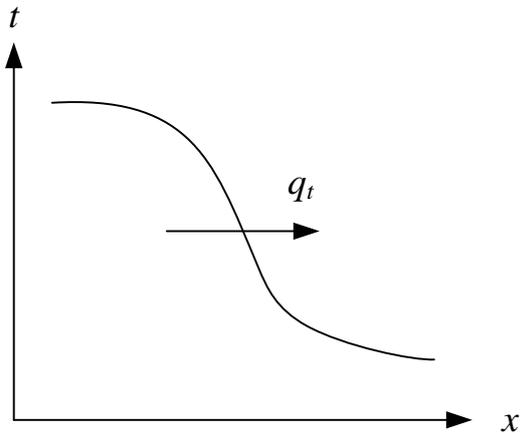
$$W(p) = \frac{5 \cdot e^{-p \cdot 20}}{30 \cdot p + 1}, \quad \text{т.е. конкретные значения параметров}$$

модели:  $k = 20$ ,  $\tau = 20$  с,  $T = 30$ с.

### **3.4 Понятие об аналогии, примеры математических моделей**

Метод аналогии — это приемы описания объекта управления и технологических процессов, при которых различные по своей природе объекты описываются одинаковыми по своей структуре уравнениями.

Примеры явлений аналогии приведем с использованием градиентных моделей:



Параметр – температура

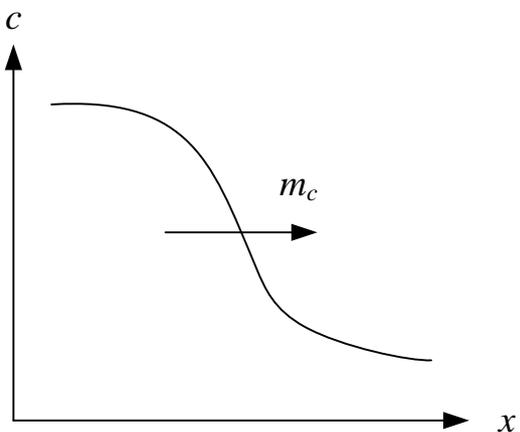
Стрелкой  $\rightarrow$  показано направление различных потоков;

$t$  – температура;

$$q_t = -\lambda \frac{dT}{dx} \text{ – закон Фурье,}$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;

$$\lambda = \frac{Вт}{(м \cdot К)}.$$

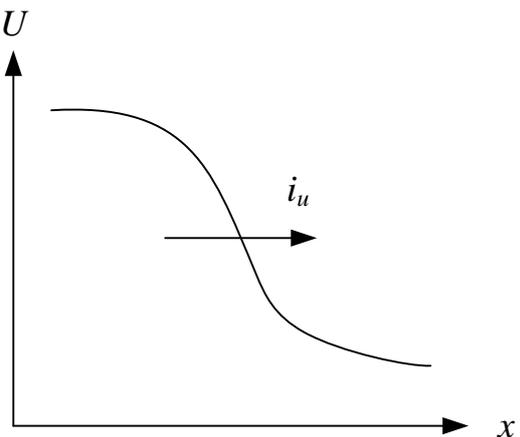


Параметр – концентрация

$c$  – концентрация;

$$m_c = -D \frac{dc}{dx} \text{ – закон Фика,}$$

где  $D$  – коэффициент диффузии.



Параметр – электрическое напряжение

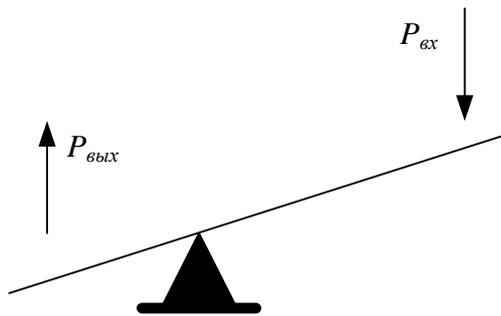
$U$  – электрическое напряжение;

$$i = -\rho \frac{dU}{dx} \text{ – закон Ома в}$$

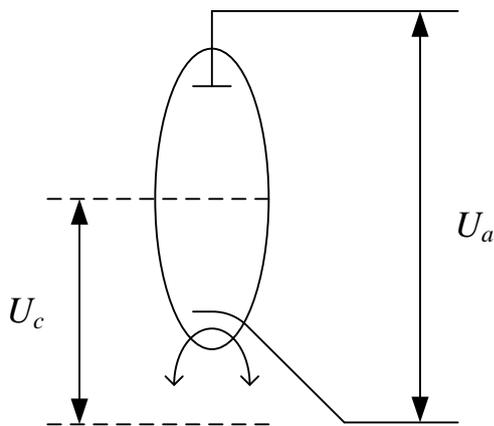
дифференциальной форме,  
где  $\rho$  – удельная проводимость.

Рис. 3.7. Примеры явления аналогии в математическом моделировании (градиентные модели).

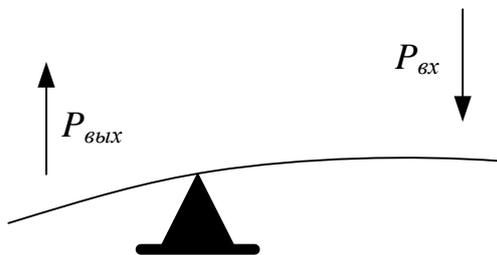
В ТАУ используются представления об элементарных звеньях, в рамках которых могут фигурировать самые различные объекты. Пример: усилительное и инерционное звено:



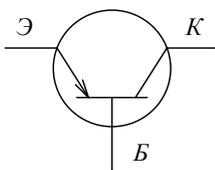
Усилительное звено – рычаг  
Архимеда.  
 $P_{\text{вых}} = K_p \cdot P_{\text{вх}}$   
 $W(p) = K_p$ .



Усилительное звено – электронно-вакуумная лампа – триод.  
 $U_a = K_{тр} \cdot U_c$   
Время движения электронов с катода на анод  $\tau \cong 10^{-9}$  с, т.е. пренебрежимо мало и прибор является практически безинерционным.  
Здесь  $K_p$  и  $K_{тр}$  – коэффициент усиления (передачи).



Инерционное звено – гибкий рычаг.  
 $W(p) = \frac{K_p}{T_p p + 1}$ .



Инерционное звено – транзистор.  
 $W(p) = \frac{K_{тран}}{T_{тран} p + 1}$   
Здесь  $K_p$  и  $K_{тран}$  – коэффициенты усиления,  $T_p$  и  $T_{тран}$  – постоянные времени.

Рис. 3.8. Примеры явления аналогии в математическом моделировании (элементарные звенья ТАУ).

### 3.5 Классификация математических моделей по сложности и уровни АСУ ТП

В последнее время возможности ЭВМ существенно расширились. Это позволяет ставить задачи развития имитационно-оптимизирующего уровня управления, в результате чего и формируется структура, так называемых, (по предложению В.Г. Лисиенко) трехуровневых систем управления технологическими процессами ТАСУ ТП (рис. 3.9).

Основные принципы построения трехуровневых АСУ ТП (ТАСУ ТП) основаны, с одной стороны, на тенденции развития интеллектуального уровня современных АСУ ТП, а с другой – на все расширяющихся возможностях управляющей и вычислительной техники. В самой иерархии построения ТАСУ ТП сохраняется исторически прослеживаемая последовательность перехода от простого к сложному – от обычных следящих локальных САР к современным интеллектуальным САУ.

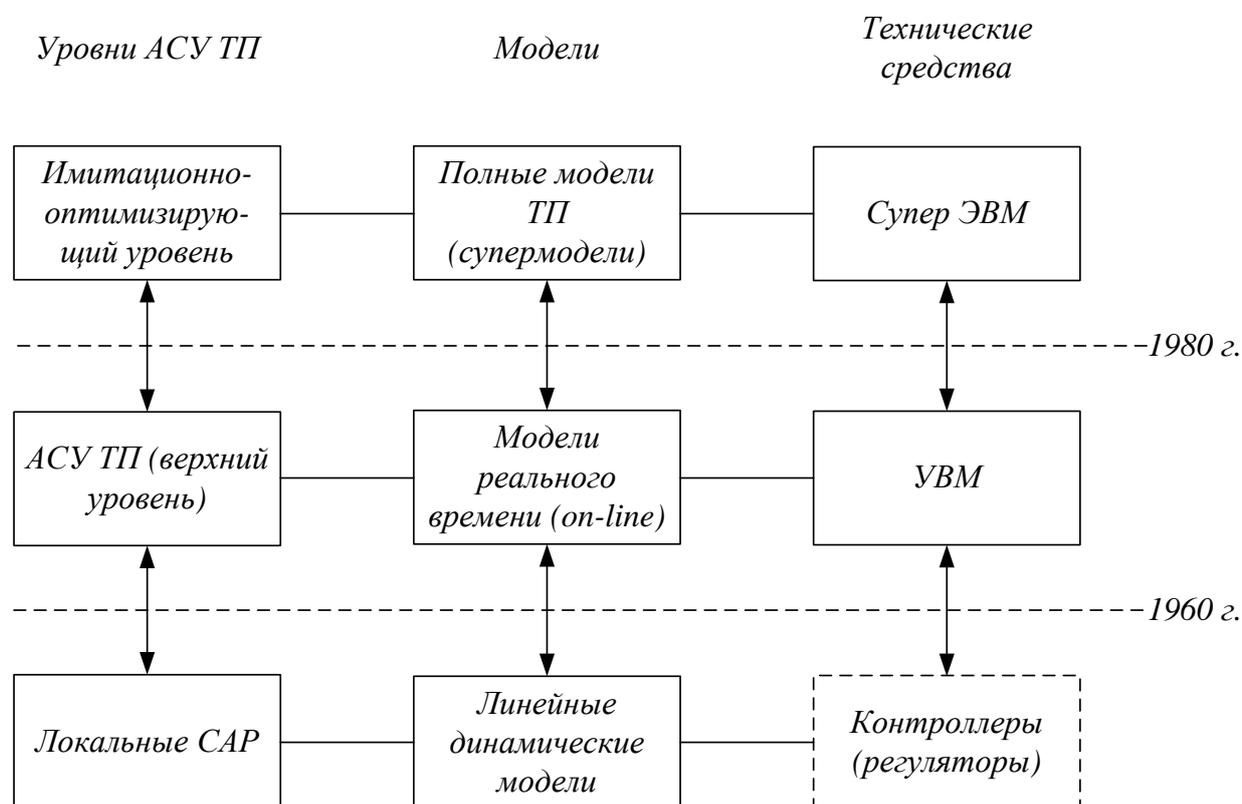


Рис. 3.9. Иерархическая структура построения трехуровневых ТАСУ ТП в соотношении со структурой моделей и техническими средствами управления.

На базовом уровне ТАСУ ТП находятся локальные САР (см. рис. 3.9), обеспечивающие стабилизацию важнейших параметров технологических процессов во всех технологических зонах объектов. На этом уровне могут реализовываться разнообразные виды локальных САР: следящие, по отклонению, с компенсацией по возмущению (инвариантные), связанные, с коррекцией, комплексные, многомерные и т.д.

Второй уровень управления является важнейшим показателем перехода от локальных САР к АСУ ТП – он характеризуется наличием элементов, позволяющих в режиме реального времени выполнять основные «автоматные» функции АСУ ТП: оценивание, идентификацию и оптимизацию режимов технологических процессов, т.е. осуществлять тактическое управление процессом.

Наконец, в третьем имитационно-оптимизирующем контуре реализуются функции базовой (стратегической) поддержки АСУ ТП. В этом контуре уже на стадии проектирования АСУ ТП проводятся предпроектные исследования системы (в режиме стратегического управления): отрабатываются модели реального времени для второго уровня АСУ ТП в виде оптимальных траекторий, рассчитываются размеры резервных (буферных) зон для учета динамики при переменном темпе, определяются места установки датчиков и вносятся при необходимости корректировки в их показания, разрабатываются системы диагностики и экспертные системы.

В процессе эксплуатации (в режиме тактического управления) имитационно-оптимизирующий контур используется для текущей идентификации параметров модели реального времени и экспертных систем, для уточнения оптимальных траекторий и динамики управления.

### **3.6 Понятие об объектах с сосредоточенными и распределенными параметрами**

**Объекты с сосредоточенными параметрами** – это объекты, у которых параметры состояния зависят от входных величин и времени и не зависят от внутренних координат объекта и системы.

Математически объект с сосредоточенными параметрами может быть представлен в виде модели  $Y = f(X, t)$ , пример, летательный аппарат (точка А) и траектория его полета.

При этом координаты  $x, y, z$  (в декартовой системе) и  $M, \rho$  и  $\theta$  (в полярной системе) являют по отношению к данному объекту внешними.

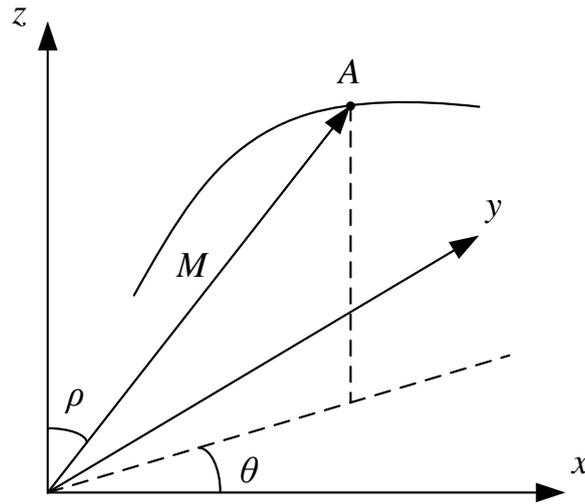


Рис. 3.10. Пример объекта с сосредоточенными параметрами (летательный аппарат):  $\rho$  – орбитальный угол (угол места);  $\theta$  – азимутальный угол;  $M$  – расстояние до объекта.

Для объекта с сосредоточенными параметрами можно представить что, объект как бы стягивается в точку, а координаты  $x, y, z$  – это лишь внешние координаты для данного объекта.

**Объекты с распределенными параметрами** – объекты, у которых вектор выходных величин зависит от вектора входных величин, времени и внутренних координат данного объекта или системы.

Уравнение таких объектов может быть записано в виде  $Y = f(X, t, x_{внут}, u_{внут}, z_{внут})$ . Пример: движение газообразной или жидкой среды в канале.

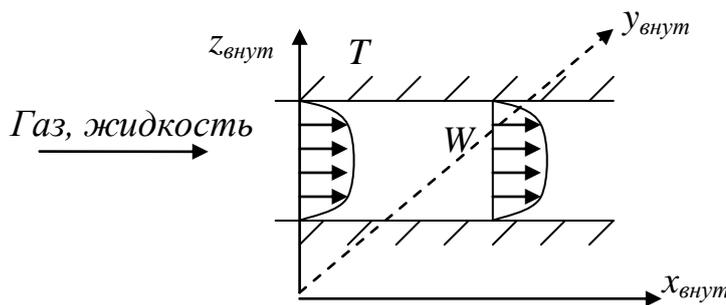


Рис. 3.11. Пример объекта с распределёнными параметрами (движение газа или жидкости в канале):  $T$  – температура,  $W$  – скорость.

При решении конкретных задач часто используются 3-х мерные модели, оцениваются поля параметров состояния: температур, давлений и т.д.:

$$T = \Psi(x_{внут}, u_{внут}, z_{внут}).$$

$$W = f(x_{внут}, y_{внут}, z_{внут}).$$

При этом возникают характерные для объектов с распределёнными параметрами понятия: интегральные и локальные характеристики, минимальная и максимальная характеристики, средние величины, поля величин и т.д.

### **3.7 Сложные системы и имитационное моделирование сложных систем**

Понятие имитационного моделирования первоначально появилось, и было развито в теории сложных систем, в которой рассматриваются стохастические взаимодействия различных, в том числе и случайных, процессов и явлений.

Сложные системы характеризуются множеством состояний. Каждое состояние определяется конкретным набором выходных параметров. Изменения входного воздействия или значений параметров, характеризующих поведение отдельных элементов системы в соответствии с установленными функциональными зависимостями, приводят к изменению выходных параметров системы и ее состояния. Последнее наряду с различными параметрами, характеризующими каждый из элементов и систему в целом, а также наличие сложных функциональных зависимостей между ними, в значительной мере затрудняет формализацию с целью описания процесса поведения таких систем. На практике редко удается получить полное математическое описание поведения сложной системы в общем виде, поэтому чаще стараются использовать методы имитации изучаемой системы.

Сложные системы можно разбить на подсистемы и элементы с иерархической структурой связи. Каждая подсистема, решая конкретную задачу, обеспечивает тем самым достижение общей цели.

Таким образом, в понятие сложной системы вкладывается следующий смысл:

1. Сложную систему можно расчленить на конечное число подсистем, а каждую подсистему, в свою очередь – на конечное число более простых подсистем и т.д., до тех пор, пока не получим элементы системы (под элементами системы будем понимать объекты, которые в условиях данной задачи не подлежат расчленению на части);

2. Элементы сложной системы функционируют во взаимодействии друг с другом;

3. Свойства сложной системы определяются не только свойствами отдельных элементов, но и характером взаимодействия между элементами.

#### **Имитационное моделирование**

Реальные процессы и системы можно исследовать с помощью двух типов математических моделей: аналитических и имитационных.

В аналитических моделях поведение реальных процессов и систем (РПС) задается в виде явных функциональных зависимостей (уравнений линейных или нелинейных, дифференциальных или интегральных, систем этих уравнений). Однако получить эти зависимости удастся только для сравнительно простых реальных процессов и систем. Когда явления сложны и многообразны, исследователю приходится идти на упрощенные представления сложных реальных процессов и систем. В результате аналитическая модель становится слишком грубым приближением к действительности. Если все же для сложных реальных процессов и систем удастся получить аналитические модели, то зачастую они превращаются в трудно разрешимую проблему. Поэтому исследователь вынужден часто использовать имитационное моделирование.

Термин «имитационное моделирование» возник при анализе сложных больших систем, в которых определяются плотности вероятностей возникновения во времени тех или иных событий.

Математическая модель процесса приобретает статус имитационной, когда для нее в качестве надстройки более высокого уровня разработана статистическая модель (вероятностная) поведения во времени контролируемых возмущений (вектор  $dI$  на схеме Рея, см. рис. 2.1).

Таким образом, *имитационное моделирование* представляет собой численный метод проведения на ЭВМ вычислительных экспериментов с математическими моделями, имитирующими поведение реальных объектов, процессов и систем во времени в течение заданного периода. При этом функционирование РПС разбивается на элементарные явления, подсистемы и модули. Функционирование этих элементарных явлений, подсистем и модулей описывается набором алгоритмов, которые имитируют элементарные явления с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени.

*Имитационное моделирование* – это совокупность методов алгоритмизации функционирования объектов исследований, программной реализации алгоритмических описаний, организации, планирования и выполнения на ЭВМ вычислительных экспериментов с математическими моделями, имитирующими функционирование реальные процессы и системы в течение заданного периода.

Под алгоритмизацией функционирования реальных процессов и систем понимается пооперационное описание работы всех ее функциональных подсистем, отдельных модулей с уровнем детализации, соответствующем комплексу требований к модели.

Имитационная модель (ИМ) – логико-математическое описание объекта, которое может быть использовано для экспериментирования на компьютере в целях проектирования, анализа и оценки функционирования объекта.

В отличие от традиционного аналитического моделирования, принцип имитационного моделирования основывается на том, что математическая модель воспроизводит процесс функционирования во времени, причём

имитируются элементарные события, протекающие в системе с сохранением логики взаимодействия.

К достоинствам метода имитационного моделирования могут быть отнесены:

1. Возможность описания поведения компонент (элементов) процессов или систем на высоком уровне детализации;
2. Отсутствие ограничений между параметрами ИМ и состоянием внешней среды РПС;
3. Возможность исследования динамики взаимодействия компонент во времени и пространстве параметров системы.

Эти достоинства обеспечивают имитационному методу широкое распространение.

Рекомендуется использовать имитационное моделирование в следующих случаях:

1. Если не существует законченной постановки задачи исследования и идет процесс познания объекта моделирования. Имитационная модель служит средством изучения явления.
2. Если аналитические методы имеются, но математические процессы сложны и трудоемки, и имитационное моделирование дает более простой способ решения задачи.
3. Когда кроме оценки влияния параметров (переменных) процесса или системы желательно осуществить наблюдение за поведением компонент (элементов) процесса или системы (ПС) в течение определенного периода.
4. Когда имитационное моделирование оказывается единственным способом исследования сложной системы из-за невозможности наблюдения явлений в реальных условиях (реакции термоядерного синтеза, исследования космического пространства).
5. Когда необходимо контролировать протекание процессов или поведение систем путем замедления или ускорения явлений в ходе имитации.
6. При подготовке специалистов новой техники, когда на имитационных моделях обеспечивается возможность приобретения навыков в эксплуатации новой техники.
7. Когда изучаются новые ситуации в РПС. В этом случае имитация служит для проверки новых стратегий и правил проведения натуральных экспериментов.
8. Когда особое значение имеет последовательность событий в проектируемых процессах или системах и модель используется для предсказания узких мест в функционировании реальных процессов и систем.

Однако ИМ наряду с достоинствами имеет и недостатки:

1. Разработка хорошей ИМ часто обходится дороже создания аналитической модели и требует больших временных затрат.
2. Может оказаться, что ИМ неточна (что бывает часто), и мы не в состоянии измерить степень этой неточности.

3. Зачастую исследователи обращаются к ИМ, не представляя тех трудностей, с которыми они встретятся, и совершают при этом ряд ошибок методологического характера.

Тем не менее, ИМ является одним из наиболее широко используемых методов при решении задач синтеза и анализа сложных процессов и систем.

Примеры использования имитационных моделей:

1. Воспроизведение и прогнозирование производственных ситуаций с целью оптимального планирования загрузки производственных мощностей.
2. Моделирования бизнес-процессов.
3. Имитационное моделирование процессов преобразования ресурсов, протекающих в экономике.
4. Оптимальное конструирование.

### **Методы имитационного моделирования**

Методы имитационного моделирования являются: аналитический метод, метод статического моделирования и комбинированный метод (аналитико-статистический) метод.

1. Аналитический метод применяется для имитации процессов в основном для малых и простых систем, где отсутствует фактор случайности. Например, когда процесс их функционирования описан системами дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений. Метод назван условно, так как он объединяет возможности имитации процесса, модель которого получена в виде аналитически замкнутого решения, или решения полученного методами вычислительной математики.

2. Другой метод имитационного моделирования – статистическое имитационное моделирование, позволяющее воспроизводить на ЭВМ функционирование сложных случайных процессов.

При исследовании сложных систем, подверженных случайным возмущениям используются:

- вероятностные аналитические модели
- вероятностные имитационные модели

В вероятностных аналитических моделях влияние случайных факторов учитывается с помощью задания вероятностных характеристик случайных процессов (законы распределения вероятностей, спектральные плотности или корреляционные функции). При этом построение вероятностных аналитических моделей представляет собой сложную вычислительную задачу. Поэтому вероятностное аналитическое моделирование используют для изучения сравнительно простых систем.

Введение случайных возмущений в имитационные модели не вносит принципиальных усложнений, поэтому исследование сложных случайных процессов проводится в настоящее время, как правило, на имитационных моделях.

В вероятностном имитационном моделировании оперируют не с характеристиками случайных процессов, а с конкретными случайными числовыми значениями параметров процессов и систем. При этом результаты, полученные при воспроизведении на имитационной модели рассматриваемого процесса, являются случайными реализациями. Поэтому для нахождения объективных и устойчивых характеристик процесса требуется его многократное воспроизведение, с последующей статистической обработкой полученных данных. Именно поэтому исследование сложных процессов и систем, подверженных случайным возмущениям, с помощью имитационного моделирования принято называть статистическим моделированием.

Статистическая модель случайного процесса – это алгоритм, с помощью которого имитируют работу сложной системы, подверженной случайным возмущениям; имитируют взаимодействие элементов системы, носящих вероятностный характер.

При реализации на ЭВМ статистического имитационного моделирования возникает задача получения на ЭВМ случайных числовых последовательностей с заданными вероятностными характеристиками. Численный метод, решающий задачу генерирования последовательности случайных чисел с заданными законами распределения получил название "метод статистических испытаний" или "метод Монте-Карло".

Метод Монте-Карло кроме статистического моделирования имеет также приложение к ряду численных методов (взятие интегралов, решение уравнений).

Итак, статистическое моделирование – это способ изучения сложных процессов и систем, подверженных случайным возмущениям, с помощью имитационных моделей.

Метод Монте-Карло – это численный метод, моделирующий на ЭВМ псевдослучайные числовые последовательности с заданными вероятностными характеристиками.

Методика статистического моделирования состоит из следующих этапов:

1. Моделирование на ЭВМ псевдослучайных последовательностей с заданной корреляцией и законом распределения вероятностей (метод Монте-Карло), имитирующих на ЭВМ случайные значения параметров при каждом испытании;
2. Преобразование полученных числовых последовательностей на имитационных математических моделях.
3. Статистическая обработка результатов моделирования.

Обобщенный алгоритм метода статистических испытаний представлен на рис. 3.12.



Рис. 3.12. Обобщенный алгоритм метода статистических испытаний.

4. Комбинированный метод (аналитико-статистический) позволяет объединить достоинства аналитического и статистического методов моделирования. Он применяется в случае разработки модели, состоящей из различных модулей, представляющих набор как статистических, так и аналитических моделей, которые взаимодействуют как единое целое. Причем в набор модулей могут входить не только модули соответствующие динамическим моделям, но и модули соответствующие статическим математическим моделям.

### **Принципы построения имитационных моделей**

Процесс функционирования сложной системы можно рассматривать как смену ее состояний, описываемых ее фазовыми переменными  $Z_1(t)$ ,  $Z_2(t)$ , ...  $Z_n(t)$  в  $n$  – мерном пространстве.

Задачей имитационного моделирования является получение траектории движения рассматриваемой системы в  $n$  – мерном пространстве  $(Z_1, Z_2, \dots Z_n)$ , а также вычисление некоторых показателей, зависящих от выходных сигналов системы и характеризующих ее свойства.

В данном случае “движение” системы понимается в общем смысле – как любое изменение, происходящее в ней.

Известны два принципа построения модели процесса функционирования систем:

1. Принцип  $\Delta t$ .

Рассмотрим этот принцип сначала для детерминированных систем. Предположим, что начальное состояние системы соответствует значениям  $Z_1(t_0), Z_2(t_0), \dots, Z_n(t_0)$ . Принцип  $\Delta t$  предполагает преобразование модели системы к такому виду, чтобы значения  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  в момент времени  $t_1 = t_0 + \Delta t$  можно было вычислить через начальные значения, а в момент  $t_2 = t_1 + \Delta t$  через значения на предшествующем шаге и так для каждого  $i$ -ого шага ( $t = \text{const}, i = 1 \div M$ ).

Для систем, где случайность является определяющим фактором, принцип  $\Delta t$  заключается в следующем:

1) Определяется условное распределение вероятности на первом шаге ( $t_1 = t_0 + \Delta t$ ) для случайного вектора, обозначим его  $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ . Условие состоит в том, что начальное состояние системы соответствует точке траектории  $(Z_1^0, Z_2^0, \dots, Z_n^0)$ .

2) Вычисляются значения координат точки траектории движения системы ( $t_1 = t_0 + \Delta t$ ), как значения координат случайного вектора, заданного распределением, найденным на предыдущем шаге.

3) Отыскиваются условное распределение вектора  $(Z_1^2, Z_2^2, \dots, Z_n^2)$  на втором шаге ( $t_2 = t_1 + \Delta t$ ), при условии получения соответствующих значений  $Z_i^1$  ( $i = 1 \div n$ ) на первом шаге и т.д., пока  $t_i = t_0 + i \Delta t$  не примет значения ( $t_M = t_0 + M \Delta t$ ).

Принцип  $\Delta t$  является универсальным, применим для широкого класса систем. Его недостатком является неэкономичность с точки зрения затрат машинного времени.

2. Принцип особых состояний (принцип  $\delta_z$ ).

При рассмотрении некоторых видов систем можно выделить два вида состояний:

- обычное, в котором система находится большую часть времени, при этом  $Z_i(t)$ , ( $i = 1 \div n$ ) изменяются плавно.
- особое, характерное для системы в некоторые моменты времени, причем состояние системы изменяется в эти моменты скачком.

Принцип особых состояний отличается от принципа  $\Delta t$  тем, что шаг по времени в этом случае не постоянен, является величиной случайной и вычисляется в соответствии с информацией о предыдущем особом состоянии.

Примерами систем, имеющих особые состояния, являются системы массового обслуживания. Особые состояния появляются в моменты поступления заявок, в моменты освобождения каналов и т.д.

Для таких систем применение принципа  $\Delta t$  является нерациональным, так как при этом возможны пропуски особых состояний и необходимы методы их обнаружения.

В практике использования имитационного моделирования, описанные выше принципы, при необходимости комбинируют.

### 3.8 Числа подобия, понятие об уравнениях в числах подобия (критериальных уравнениях)

В теории подобия вводится понятие о числах подобия (раньше они назывались критериями подобия) и масштабах подобия. Масштабом подобия называется отношение параметра натурального объекта к соответствующему параметру модели:

$$m_n = \frac{M_{\text{нат}}}{M_{\text{мод}}}, \quad (3.5)$$

Например, при модельном исследовании гидродинамики летательных аппаратов используется геометрический теоретический масштаб подобия (рис. 3.13).

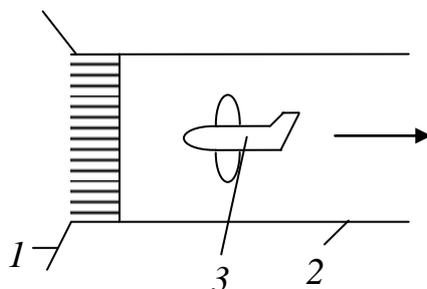


Рис. 3.13. Модельное исследование гидродинамики летательного аппарата в аэродинамической трубе: 1 – сопло Витошинского; 2 – аэродинамическая труба; 3 – модель (геометрический масштаб, например,  $m_n = 20$ ).

При этом 2-я теорема подобия, или  $\pi$ -теорема заключается в том, что каждое уравнение какого либо процесса или объекта управления может быть представлено уравнением, связывающим числа или критерии подобия, т.е. представлено в критериальной форме

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n), \quad (3.6)$$

где  $\pi_1$  – определяемое число подобия,  $\pi_2 \dots \pi_n$  – определяющие числа подобия.

Числа подобия представляют собой безразмерные комплексы – сочетания определённых параметров, характерных для данного процесса или объекта.

Запись уравнения в критериальной форме широко используется в различных областях науки и техники и в том числе в ТАУ. Преимущества такой формы: уменьшение количества чисел подобия по сравнению с количеством параметров; безразмерная форма записи уравнений.

Приведём примеры критериальных уравнений.

1) Например, для «L-R» электрической цепочки (рис. 3.14) параметрическое уравнение записывается в виде:

$$iR - L \frac{di}{dt} = U, \quad (3.7)$$

где  $i$  – ток;  $U$  – напряжение,  $R$  и  $L$  – сопротивление и индуктивность, соответственно.

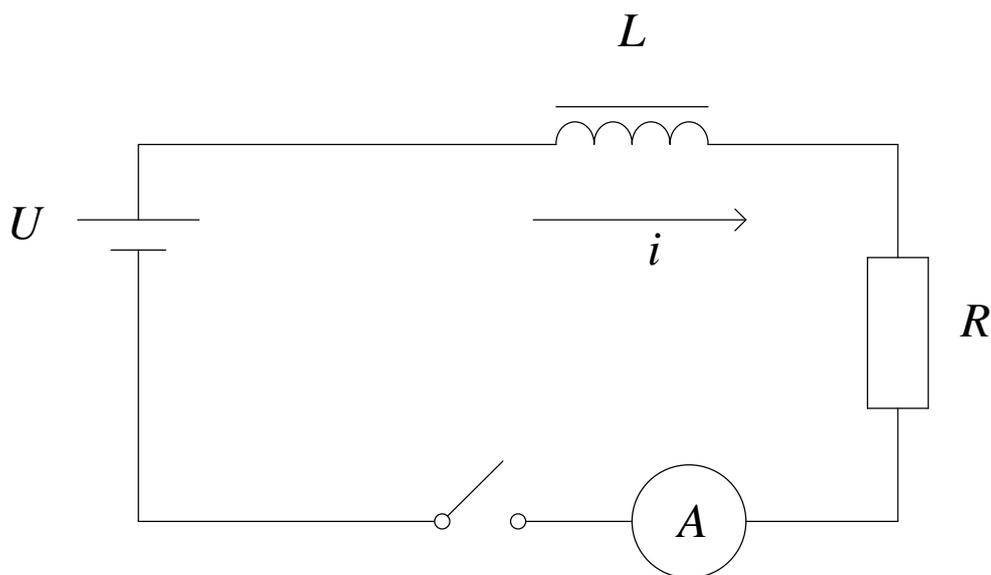


Рис. 3.14. Схема «R-L» цепочки.

В соответствии со второй теоремой подобия уравнение (3.7) преобразуется в критериальное уравнение:

$$\pi_i = 1 - e^{-\pi_t}, \quad (3.8)$$

где  $\pi_i = \frac{i}{UR^{-1}}$  ;  $\pi_t = \frac{t}{LR^{-1}}$  – числа подобия тока и времени, соответственно.

2) Для сверхзвуковых сопел Лавая используется число подобия Маха –  $M = w/a$  (отношение скорости в выходном сечении сопла к скорости звука в данной среде).

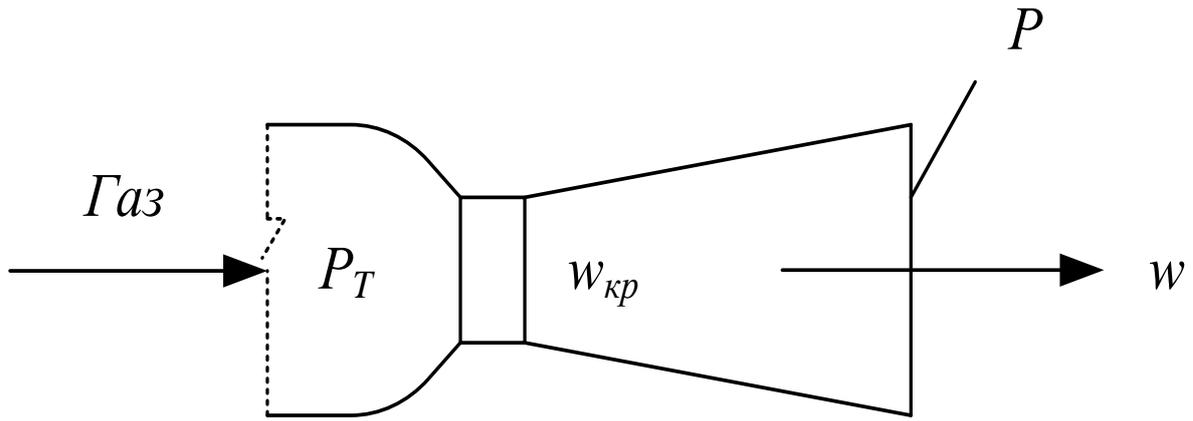


Рис. 3.15. Схема сопла Лавая:  $P_T$  – давление торможения газа;  $w_{кр}$  и  $w$  – скорости в критическом сечении сопла Лавая и в выходном сечении, соответственно;  $P$  – давление газа в выходном сечении сопла;  $P = P_{нар}$  (для расчётного режима) – давление в выходном сечении сопла;  $P_{нар}$  – давление в окружающей среде.

Критериальная форма представления модели включает, зависимость числа  $M$  от отношения давления  $P$  к  $P_T$ .

При этом величина:

$$\pi(\lambda) = \frac{P}{P_T} \text{ – газодинамическая функция от коэффициента скорости } \lambda ;$$

$$\lambda = \frac{w}{a_{кр}} \text{ здесь } a_{кр} \text{ – скорость звука в критическом сечении сопла.}$$

Модель в критериальной форме может быть представлена в виде:

$$M = f[\pi(\lambda)]. \quad (3.9)$$

3) давления газа в канале  $\Delta p$  могут быть представлено функцией:

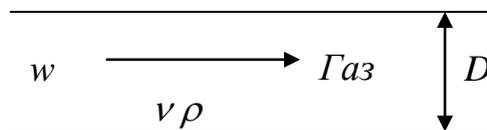


Рис. 3.16. Движение газа в канале.

$$\Delta p = f(w, D, \nu),$$

где  $\Delta p$  – потери давления в канале, чтобы обеспечить движение;

$\nu$  – кинематическая вязкость газа;

$\rho$  – плотность газа;

$w$  – скорость газа ;

$D$  – диаметр канала.

При этом используются числа подобия Ейлера  $Eu$  и Рейнольдса  $Re$ :

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho w^2}, \quad Re = \frac{wD}{\nu}.$$

Данная газодинамическая модель движения представляется в безразмерном (критериальном) виде.

$$Eu = f(Re). \quad (3.10)$$

При этом может иметь место турбулентный и ламинарный режим течения газа или жидкости в зависимости от числа подобия  $Re$ :

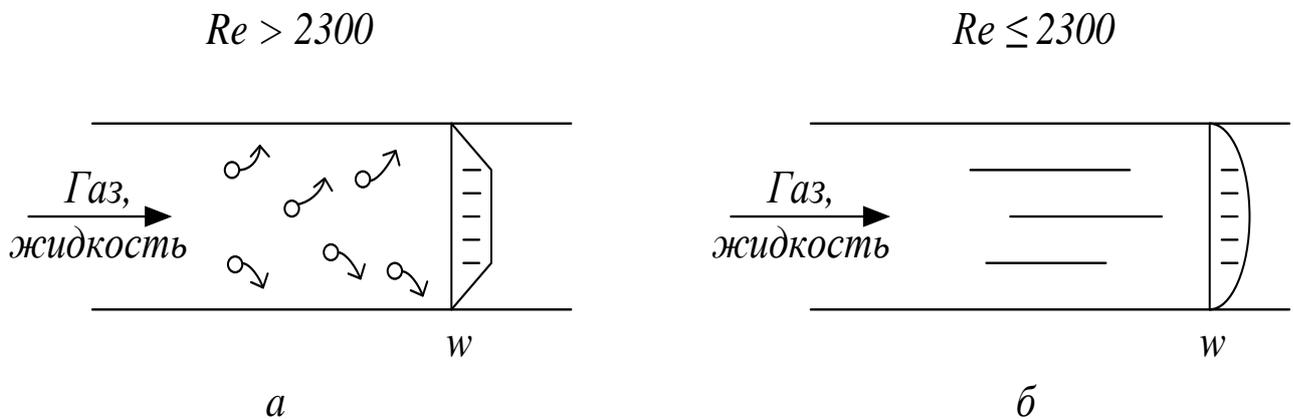


Рис. 3.17. Режимы течения газа: а – турбулентный; б – ламинарный.

#### 4) Нагрев термически массивных тел.

При этом температура на поверхности тела выражается параметрическим уравнением:

$$T_n = f(\alpha, \lambda, r, t, c, \rho, \dots),$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи,  $r$  – размер тела,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $c$  – удельная теплоёмкость;  $\rho$  – плотность.

В критериальной форме уравнение представляется в виде:

$$\Theta_n = f(Bi, Fo),$$

где

$$\Theta_n = \frac{T_n}{T_{нач}}, \quad Bi = \frac{\alpha r}{\lambda}, \quad Fo = \frac{at}{r^2}, \quad a = \frac{\lambda}{\rho c},$$

где  $\Theta_n$  – температурное число подобия;  $Bi$  и  $Fo$  – числа подобия Био и Фурье, соответственно;  $a$  – коэффициент температуропроводности,  $T_{нач}$  – начальная температура нагреваемого тела.

5) Изменение выходной величины  $y_{вых}$  при однократной скачкообразном возмущении входной величины  $x_{вх} = \Delta x_{вх}$ .

При этом получаем формулу кривой разгона (рис. 3.18) для инерционного статического звена первого порядка:

$$y_{вых} = k\Delta x_{вх} (1 - e^{-t/T}), \quad (3.11)$$

где  $k$  и  $T$  – коэффициенты усиления (передачи) и постоянная времени, соответственно.

Критериальная форма уравнения:

$$Y_{вых} = 1 - e^{-\pi(t)}, \quad (3.12)$$

где  $Y_{вых} = \frac{y_{вых}}{k \Delta x_{вх}}$  – динамическое отклонение;

$\pi(t) = t/T$  – число подобия времени.

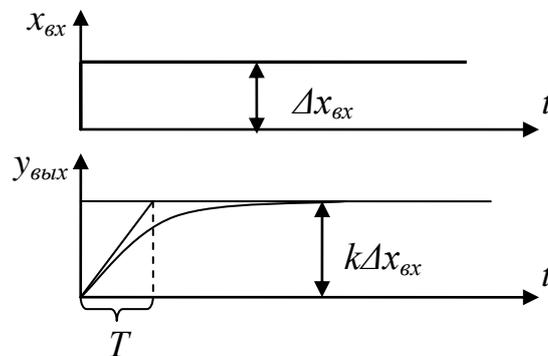


Рис. 3.18. Кривая разгона инерционного статического звена первого порядка.

В случае наличия чистого запаздывания используется число подобия:

$$\frac{\tau_{зан}}{T} = L_{зан}.$$

## Глава 4. Обобщенный термодинамический подход

### 4.1 Обобщенный термодинамический подход (ОТП) как детерминированная основа для построения математических моделей применительно к процессам управления

Математические модели делятся на детерминированные, стохастические и комбинированные:(рис.4.1)

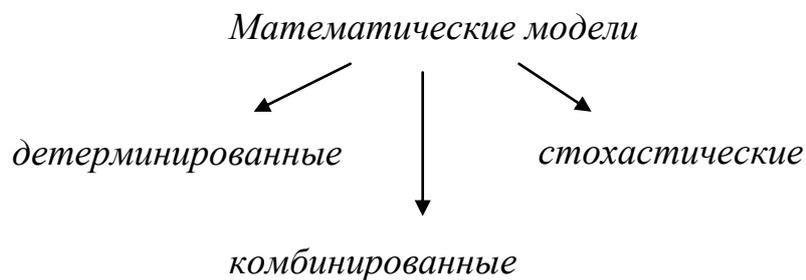


Рис. 4.1. Виды математических моделей.

Соответственно можно выделить и методы построения математических моделей:

1. Стохастический метод – основан на построении математической модели с использованием стохастических приемов на базе эксперимента.
2. Детерминированный метод основан на прямом использовании законов и явлений физики, химии и т.д.
3. Комбинированный метод включает как стохастический, так и детерминированный методы построения математических моделей.

Основные этапы построения математических моделей и рекомендуемые подходы их реализации иллюстрируются рис.4.2.

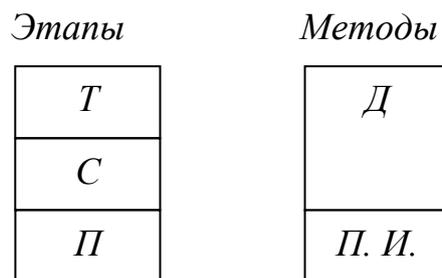


Рис. 4.2. Этапы построения математических моделей и основные подходы их реализации: *T* – топология; *C* – структура; *П* – параметры; *Д* – детерминированный подход; *П.И.* – параметрическая идентификация.

В этом контексте рассмотрим дополнительно основные этапы построения математических моделей (см. также п.3.3).

**T – топология модели:** на этом этапе находятся взаимозависимые входные и выходные величины объектов управления, т.е.  $Y = f(X, t)$  (см.3.3).

Как отмечалось, характерные особенности топологии модели выявляются наглядно на примере статистических характеристик объекта (рис. 3.3), т.е. характеристик объекта в установившемся состоянии.

**C – структура модели:** это запись модели в математической форме (в виде уравнений: алгебраических, дифференциальных, интегральных и т.д.).

**П – параметры модели:** их представление связано уже с параметрической формой записи уравнений, при которой параметры записываются в количественном виде.

Для построения детерминированных математических моделей в теории управления используется **обобщенный термодинамический подход (ОТП)**.

Отметим основных участников создания обобщенного термодинамического подхода.

Академик Петров Б.Н. с соавторами развил ОТП в книге «Применение обобщенного термодинамического подхода при составлении моделей объектов управления».

Профессор Яковлев В.Б. с соавторами (Санкт-Петербургский Государственный Электро-Технический Университет (ЛЭТИ)) развивал использование ОТП для построения математических моделей с сосредоточенными параметрами.

Профессор, д.т.н. Лисиенко В.Г. (Уральский Государственный Технический Университет – УПИ) развил ОТП для построения математических моделей с распределенными параметрами.

Методология ОТП заключается в приложении I и II законов термодинамики к любому объекту управления в обобщенной форме.

### **Основные постулаты ОТП:**

1. Для описания любых физических, химических, физико-химических, информационных и др. явлений наиболее представительной является структура моделей по аналогии с основными законами термодинамики .

2. При этом ис пользуются I и II законы термодинамики:

- ***Первый закон термодинамики – закон сохранения энергии***

Теплота, переданная извне, расходуется на совершение работы и изменение внутренней энергии вещества.

$$dQ = dA + dU , \quad (4.1)$$

Энтропийная форма I закона термодинамики:

$$TdS = dA + dU , \quad (4.2)$$

$$S = \ln W ,$$

$$dS \geq \frac{dQ}{T} , \quad (4.3)$$

где  $dQ$  – количество теплоты;

$T$  – абсолютная температура;

$$dQ = TdS ;$$

$S$  – энтропия – мера упорядоченности, логарифм вероятности совершения какого-либо термодинамического события  $W$ .

- ***Второй закон термодинамики -закон переноса энергии.***

В изолированной системе теплота переходит от более нагретого тела к менее нагретому. В обратном направлении теплота может передаваться только при совершении работы.

Примером такого переноса может быть перенос теплоты за счет разности температур:

$$dq = kF(\theta_2 - \theta_1)dt, \quad (4.4)$$

где  $k$  – коэффициент теплопередачи;  
 $F$  – поверхность нагрева;  
 $\theta_2$  и  $\theta_1$  – температура более нагретого и менее нагретого тел,  
соответственно.

В обобщенной форме II закон термодинамики может быть представлен формулой:

$$dq = \alpha \Phi dt, \quad (4.5)$$

где  $q$  – обобщенный поток;  
 $\alpha$  – обобщенная проводимость;  
 $\Phi$  – обобщенный потенциал или обобщенная сила.

Для иллюстрации уравнения переноса в рамках обобщённого термодинамического подхода может быть использована схема, представленная на рис.4.4.

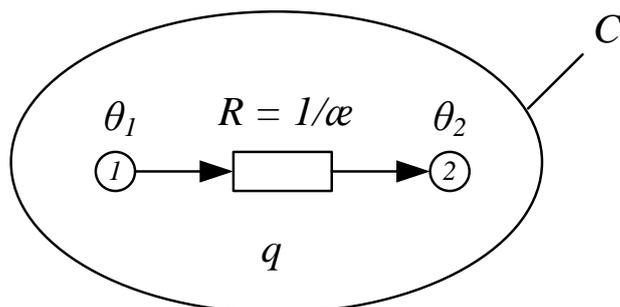


Рис. 4.3. Схема иллюстрации переноса при обобщенном термодинамическом подходе:  $q$  – обобщенный поток;  $\theta_1$  и  $\theta_2$  – потенциалы узлов 1 и 2;  $R$  – обобщённое сопротивление;  $\alpha = 1/R$  – обобщённая проводимость;  $C$  – обобщённая ёмкость;  $\theta_1 - \theta_2$  – разность потенциалов – обобщённая сила.

## 4.2 Методика и примеры использования обобщенного термодинамического подхода при составлении математических моделей объектов с сосредоточенными параметрами

Ниже приведены примеры использования обобщенного термодинамического подхода для составления моделей объектов с сосредоточенными параметрами.

Напоминаем, что объект с сосредоточенными параметрами это объект, у которого параметры состояния не зависят от внутренних координат объекта, при этом сами внутренние координаты объекта не вводятся в рассмотрение.

Пример 1. Модель теплового объекта, включая модель датчика.

В качестве примера взят тепловой объект: электрическая нагревательная печь для нагрева титановых сплавов (рис. 4.4).

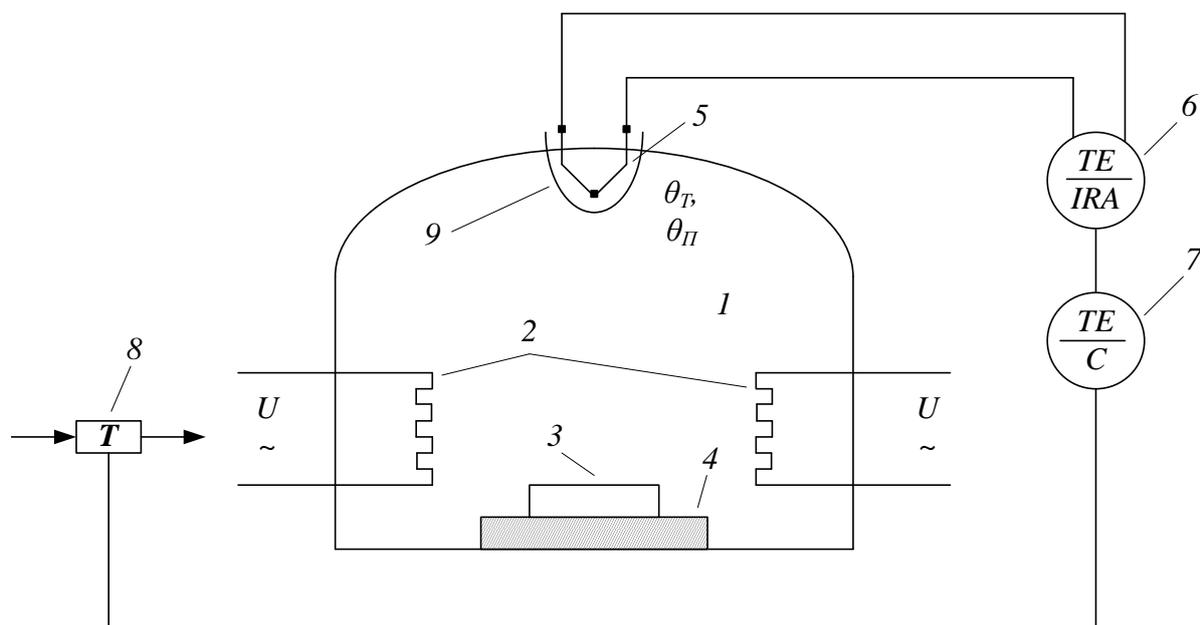


Рис. 4.4. Электрическая нагревательная печь: 1 – рабочее пространство печи; 2 –нагреватели - резисторы , материал X27, 1X18Н9Т; 3 – садка (пакет листов, слиток); 4 –поддон; 5 – термопара: -ТХА- хромель-алюмелевая (до 1200°С); - ТХК – хромель-копелевая (до 800°С); - ПП –платина-платинородиевая (до 1600°С); - ПР30/6 – платинородий-платинородиевая (до 1800°С); 6– вторичный прибор для измерения температуры, электронный потенциометр; 7– регулятор – контроллер; 8 – тиристорное управление; 9 – чехол термопары.

Методика построения математических моделей с использованием обобщенного термодинамического подхода состоит в том, что сложный объект разбивается на элементарные звенья, а затем для этих звеньев применяются законы термодинамики в обобщенном виде.

Для данного примера (см. рис. 4.4) рассмотрим следующие основные элементы (звенья):

1) Звено «термопара – печь».

- Уравнение теплового баланса (первый закон термодинамики):

$$dQ_{II} = dQ_T, \quad (4.6)$$

где  $Q_T$  – теплота, переданная термопаре;  $Q_{II}$  – теплота, отданная от печи.

- Уравнение переноса теплоты (второй закон термодинамики):

$$dQ_{II} = K_T F_T (\theta_{II} - \theta_T) dt, \quad (4.7)$$

где:  $K_T F_T$  – обобщенная проводимость;  $\theta_{II} - \theta_T$  – обобщенная сила;

$$dQ_T = c_T m_T d\theta_T, \quad (4.8)$$

где:  $c_T$  – удельная теплоемкость спая термопары;  $m_T$  – масса спая термопары.

В соответствии с уравнением (4.6) приравниваем уравнения (4.7) и (4.8), получаем:

$$c_T m_T d\theta_T = K_T F_T (\theta_{II} - \theta_T) dt ,$$

$$((c_T m_T / K_T F_T) d\theta_T / dt + \theta_T = \theta_{II} . \quad (4.9)$$

В результате получено уравнение инерционного статического звена первого порядка:

$$T_T d\theta_T / dt + \theta_T = \theta_{II} , \quad (4.10)$$

где:  $T_T$  – постоянная времени.

$$T_T = c_T m_T / K_T F_T = R_T C_T ;$$

$R_T$  – обобщенное сопротивление,

$C_T$  – обобщенная емкость;

$$R_T = 1 / K_T F_T ;$$

$$C_T = c_T m_T$$

2) Звено «термопара – чехол».

Аналогично получена модель для звена «термопара – чехол».

Используя параметры для чехла термопары:  $c_{\text{ч}}$ ,  $m_{\text{ч}}$ ,  $F_{\text{ч}}$ ,  $K_{\text{ч}}$ , получаем уравнение

$$(c_{\text{ч}} m_{\text{ч}} / K_{\text{ч}} F_{\text{ч}}) d\theta_{\text{ч}} / dt + \theta_{\text{ч}} = \theta_T ,$$

$$\text{где } T_{\text{ч}} = c_{\text{ч}} m_{\text{ч}} / K_{\text{ч}} F_{\text{ч}} ,$$

$$\text{и тогда } T_{\text{ч}} d\theta_{\text{ч}} / dt + \theta_{\text{ч}} = \theta_T . \quad (4.11)$$

3) Звено «чехол – печь».

Используя параметры для печи:  $c_{\text{п}}$ ,  $m_{\text{п}}$ ,  $F_{\text{п}}$ ,  $K_{\text{п}}$ ,

$$(c_{\text{ч}} m_{\text{ч}} / K_{\text{ч}} F_{\text{ч}}) d\theta_{\text{ч}} / dt + \theta_{\text{ч}} = \theta_{\text{п}} ,$$

$$\text{где } T_{\text{ч}} = c_{\text{ч}} m_{\text{ч}} / K_{\text{ч}} F_{\text{ч}} ,$$

$$\text{и тогда } T_{\text{ч}} d\theta_{\text{ч}} / dt + \theta_{\text{ч}} = \theta_{\text{п}} . \quad (4.12)$$

4) Звено «печь – резистор».

Используем температуру резистора  $\theta_R$  и параметры рабочего пространства печи, получаем уравнение

$$(c_{\text{п}} m_{\text{п}} / K_{\text{п}} F_{\text{п}}) d\theta_{\text{п}} / dt + \theta_{\text{п}} = \theta_R ,$$

$$\text{где } T_{\text{п}} = c_{\text{п}} m_{\text{п}} / K_{\text{п}} F_{\text{п}} ,$$

$$\text{и тогда } T_{\text{п}} d\theta_{\text{п}} / dt + \theta_{\text{п}} = \theta_R . \quad (4.13)$$

5) Звено «напряжение – температура резистора»

Используем параметры для резистора  $U$  и  $\theta_P$ , тогда данное звено может быть представлено в виде уравнения:

$$T_P \frac{d\theta_P}{dt} + d\theta_P = K_{рез} U, \quad (4.14)$$

где  $T_P$  – постоянная времени резистора;  $K_{рез}$  – коэффициент передачи в системе «напряжение – температура резистора».

Запишем передаточные функции рассмотренных звеньев:

$$W_T(p) = 1/(T_T p + 1) \text{ – «термопара – чехол»};$$

$$W_{ч}(p) = 1/(T_{ч} p + 1) \text{ – «чехол – печь»};$$

$$W_{II}(p) = 1/(T_{II} p + 1) \text{ – «печь – резистор»};$$

$$W_P(p) = K_{рез}/(T_P p + 1) \text{ – «напряжение – резистор»}.$$

Воспользуемся правилом, что при последовательном включении звеньев их передаточные функции перемножаются, при этом получим модель объекта в виде:

$$W_{об}(p) = W_T(p) W_{II}(p) W_{ч}(p) W_P(p),$$

$$\text{или } W_{об}(p) = K_{рез} / (T_T p + 1) (T_{II} p + 1) (T_{ч} p + 1) (T_P p + 1). \quad (4.15)$$

Как видим, получена передаточная функция, для рассматриваемого объекта характеризующая модель данного объекта как представленную линейным дифференциальным уравнением четвёртого порядка.

Однако в случае высокотемпературных объектов величины коэффициентов теплопередачи  $K$  в уравнениях (4.7) – (4.13) не могут считаться постоянными как это было ранее принято. Например, при выводе уравнения (4.7) было принято, что  $K_T = const$ . В этом случае уместно провести своеобразную критику линейности модели.

В высокотемпературных печах, в которых преобладает передача тепла излучением величина  $K_T$  может быть представлена в виде (используем закон Стефана – Больцмана):

$$K_T = \frac{\varepsilon_{II} \sigma_0 (\theta_{II}^4 - \theta_T^4)}{\theta_{II} - \theta_T},$$

где  $\sigma_0 = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{Вт}{(м^2 \cdot К^4)}$  – коэффициент излучения абсолютно

чёрного тела;

$\varepsilon_{II}$  – приведённая (видимая) степень черноты в системе «термопара-печь».

Таким образом, в уравнение (4.10) появляется источник нелинейности. Т.е. коэффициент  $K_T$  сам зависит от температуры.

Вторым источником нелинейности уравнения (4.10) является весьма вероятная зависимость удельной теплоёмкости спая термопары от температуры  $c_T = f(\theta_T)$ .

Пример. 2 Уровень в жидкостном объекте.

Объект может быть представлен в виде бака с жидкостью. При этом в первом случае жидкость имеет свободный сток (объект 1), во втором – истечение жидкости происходит с помощью насоса на выходном патрубке – обеспечивается принудительный сток жидкости.

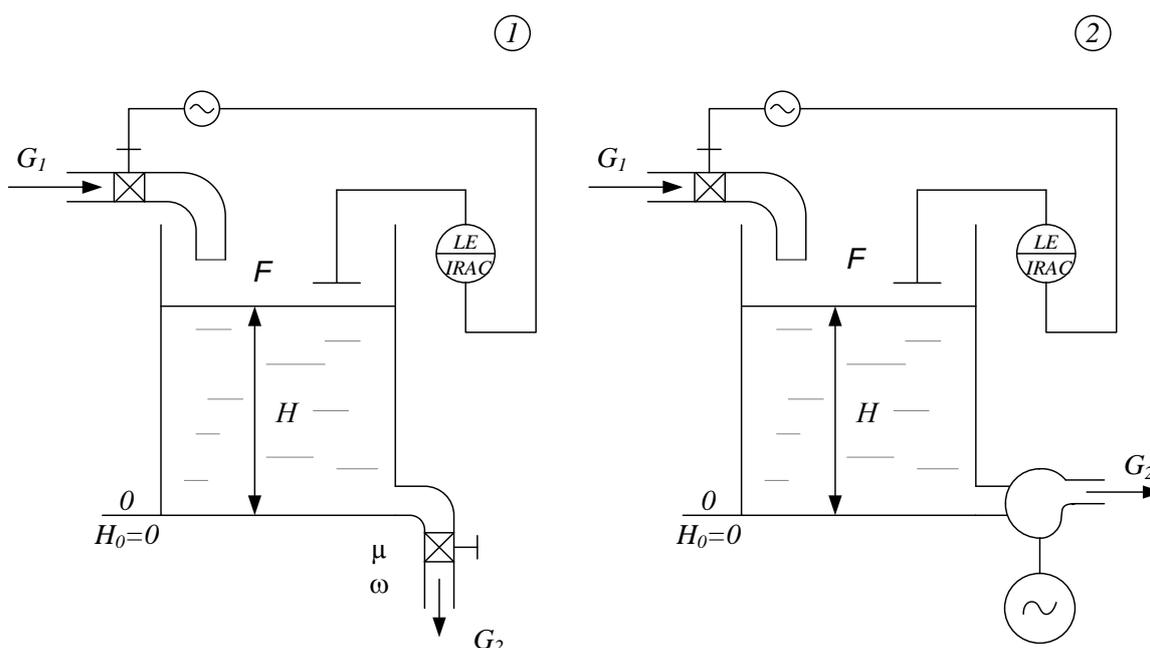


Рис. 4.5. Схема контроля и регулирования уровня в жидкостном объекте – баке с жидкостью:  $G_1$  и  $G_2$  – приток и сток жидкости, соответственно;  $H$  – уровень жидкости;  $\mu$  – коэффициент истечения жидкости;  $\omega$  – площадь проходного сечения выходного крана;  $F$  – площадь поверхности бака; 1 – свободный сток жидкости, 2 – вынужденный сток (например, с помощью насоса).

Отметим возможные типы применяемых датчиков уровня на жидкостных объектах:

- поплавковый;
- ёмкостной;
- радиоактивный.

Для построения математических моделей применяем обобщённый термодинамический подход

Для объекта 1.

Уравнение сохранения массы жидкости:

$$G_1 - G_2 = \Delta G, \quad (4.16)$$

где  $\Delta G$  – разность между расходами жидкости для её притока и стока.

В случае отсутствия утечек и испарения уравнение (4.16) можно преобразовать к виду:

$$\frac{dH}{dt} \cdot F = G_1 - G_2, \quad (4.17)$$

где  $H$  – уровень жидкости;

$F$  – площадь поверхности бака;

Уравнение переноса для случая свободного стока жидкости может быть представлено в виде:

$$G_2 = \mu \omega H, \quad (4.18)$$

где  $\mu$  – коэффициент истечения;

$\omega$  – площадь проходного сечения выходного крана.

Тогда из уравнений (4.17) и (4.18) следует:

$$\frac{dH}{dt} F = G_1 - \mu \omega H, \quad (4.19)$$

или

$$\frac{F}{\mu \omega} \frac{dH}{dt} + H = \frac{1}{\mu \omega} G_1, \quad (4.20)$$

В результате, таким образом, получено уравнение инерционного статического звена первого порядка,

где  $T_\sigma = \frac{F}{\mu \omega}$  – постоянная времени инерционного звена;

$K_\sigma = \frac{1}{\mu \omega}$  – коэффициент усиления.

При этом величина  $T_\sigma = R_\sigma C_\sigma = \frac{F}{\mu \omega}$ , где обобщённая ёмкость  $C_\sigma = F$

и обобщённое сопротивление  $R_\sigma = \frac{1}{\mu \omega}$ .

В итоге формулу (4.20) приведём к каноническому виду:

$$T_\sigma \frac{dH}{dt} + H = K_\sigma G_1, \quad (4.21)$$

В случае однократного скачкообразного изменения притока жидкости  $G_1 = \Delta G$  из формулы (4.21) получаем кривую разгона по изменению уровня жидкости  $H$ .

$$H = K_{\delta} \Delta G \left( 1 - e^{-t/T_{\delta}} \right) = \frac{1}{\mu \omega} \Delta G \left( 1 - e^{-\frac{t}{F_{\delta}/\mu \omega}} \right) \quad (4.22)$$

При выводе модели объекта были приняты определенные допущения, обеспечивающие линейность модели. В этом случае уместна своеобразная критика линейности модели.

В соответствии с уравнением Бернулли расход жидкости при свободном её стоке:

$$G_2 = \mu_1 \omega \sqrt{H}, \quad (4.23)$$

где  $\mu_1$  – реальный коэффициент истечения жидкости, т.е. расход  $G_2$  пропорционален не первой степени, а корню квадратному из уровня жидкости. Кроме того, коэффициент истечения:

$$\mu_1 = f(G_2) = f_1(\text{Re}), \quad (4.24)$$

где  $\text{Re}$  – число подобия Рейнольдса, т.е. не является величиной постоянной.

Таким образом, модель жидкостного объекта лишь приближённо может быть представлена линейной моделью.

Для объекта 2 имеем также уравнение сохранения массы жидкости:

$$\frac{dH}{dt} F = \Delta G = G_1 - G_2, \quad (4.25)$$

но при этом величины  $G_2 = \text{const}$  и  $\Delta G = \text{const}$ .

При этом дифференциальное уравнение изменения уровня жидкости принимает вид:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{T^*} \Delta G, \quad (4.26)$$

и

$$H = \frac{1}{T^*} \int_0^{\infty} \Delta G dt, \quad (4.27)$$

Уравнение (4.27) соответствует уравнению интегрирующего звена, которое в общем случае может быть записано в виде:

$$y_{\text{вых}} = \frac{1}{T^*} \int_0^{\infty} x_{\text{вх}} dt. \quad (4.28)$$

Построим кривые разгона или переходные характеристики 2-х рассмотренных объектов.  $H_y$

Используем однократное скачкообразное возмущение на входе жидкости:

Для объекта 1 получаем (см. также формулу (4.22)):

$$H_y = K_{\delta} \Delta G (1 - e^{-t/T_{\delta}}).$$

Для объекта 2 находим:  $H_y = \frac{1}{T^*} \int_0^{\infty} \Delta G dt$  ..

или при  $\Delta G = \text{const}$   $H_y = \frac{1}{T^*} \Delta G \cdot t$ .

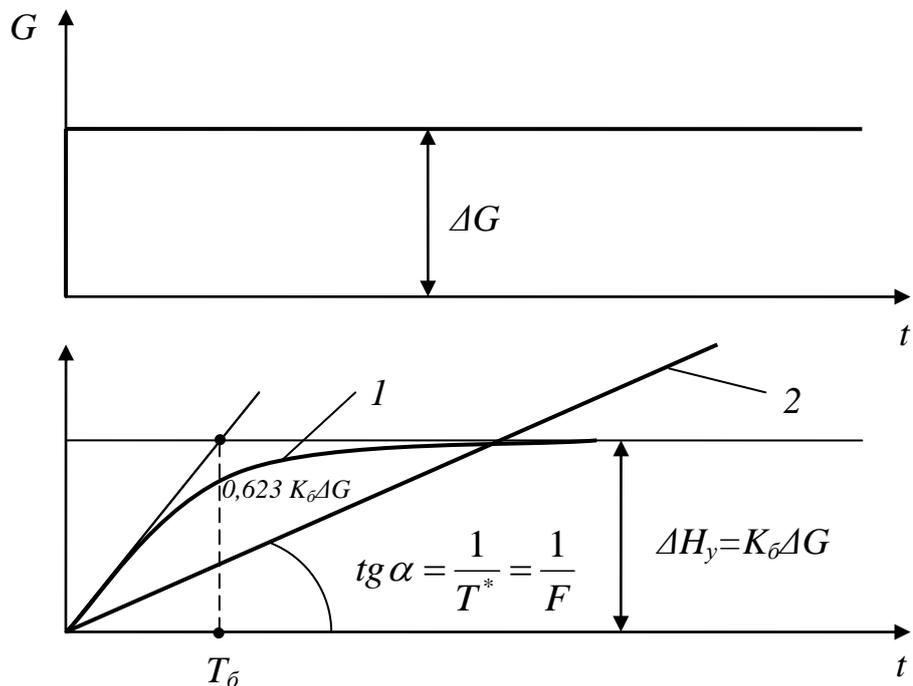


Рис. 4.6. Пример переходных характеристик (кривых разгона): 1 – объект с самовыравниванием (статический объект), 2 – объект без самовыравнивания (астатический объект).

Известно что, объекты без самовыравнивания представляют гораздо большую сложность при автоматическом регулировании, чем объекты с самовыравниванием. В частности, при регулировании на объектах, подобных объекту 2, применяются ПИД-регуляторы.

В качестве примера статического и астатического объектов рассмотрим элементы конструкции машины непрерывного литья заготовок (МНЛЗ), а именно уровни в промежуточном ковше  $H_{np}$  и кристаллизаторе  $H_{кр}$ .

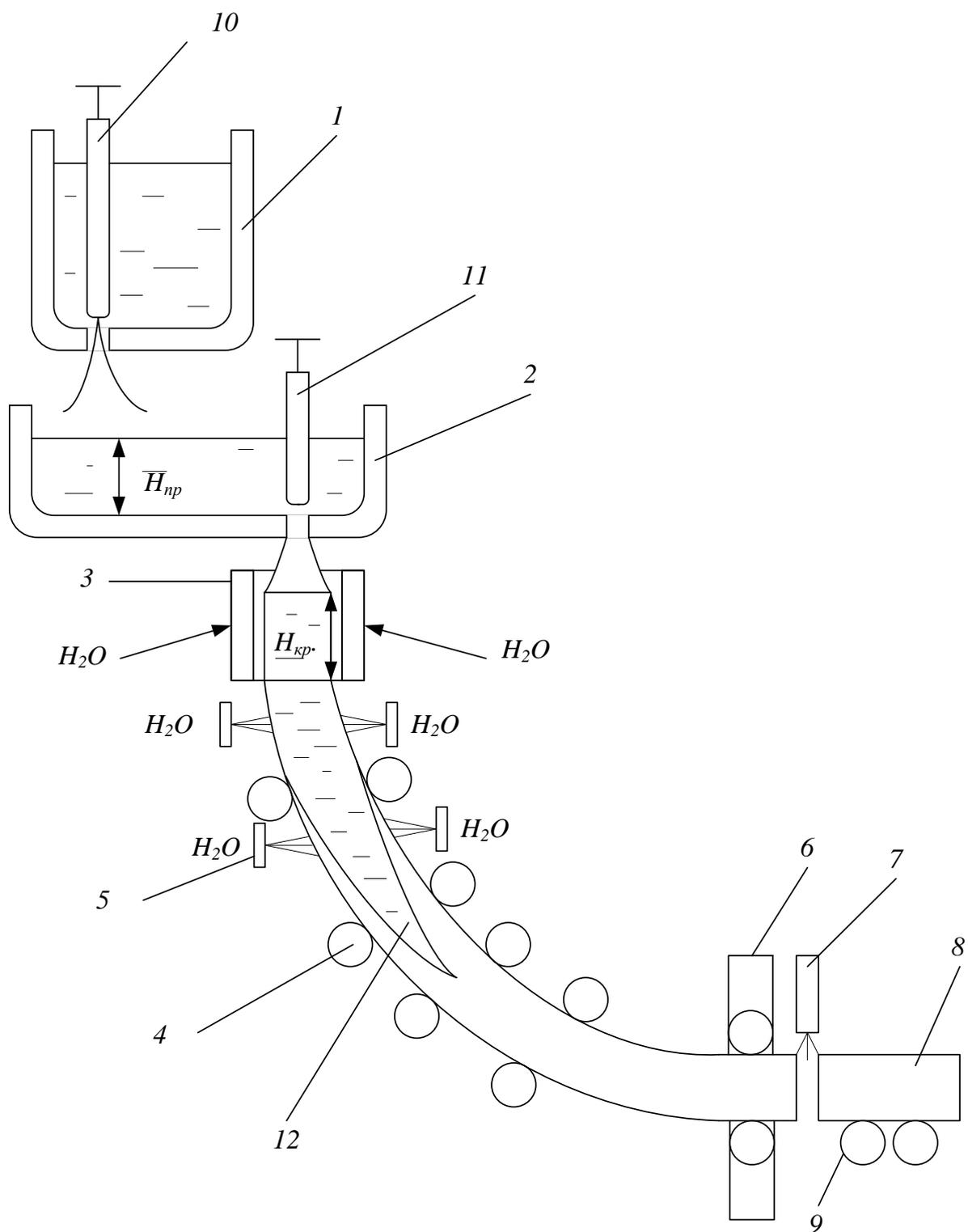


Рис. 4.7. Схема МНЛЗ: 1 – сталеразливочный ковш; 2 – промежуточный ковш; 3 – кристаллизатор; 4 – правящие и опорные валки; 5 – водные форсунки; 6 – тянущая клеть; 7 – кислородный резак; 8 – мерный слиток (заготовка); 9 – рольганг; 10 – стопор сталеразливочного ковша; 11 – стопор промежуточного ковша; 12 – жидкая сердцевина металла.

Как отмечалось, уравнения функционирования объектов с самовыравниванием (статических) и без самовыравнивания (астатических), имеют вид:

– статического  $T \frac{dy_{\text{вых}}}{dt} + y_{\text{вых}} = kx_{\text{ex}}$  ;

– астатического  $y_{\text{вых}} = \frac{1}{T^*} \int_0^{\infty} x_{\text{ex}} dt$  .

В случае МНЛЗ уровень в промежуточном ковше представляет собой статический объект, при этом имеет место свободный сток жидкого металла. Уровень в кристаллизаторе представляет собой астатический объект, вследствие вынужденного стока жидкого металла из кристаллизатора под действием тянущей клетки.

Пример 3. Электрическая RC-цепочка (Г-образный электрический фильтр).

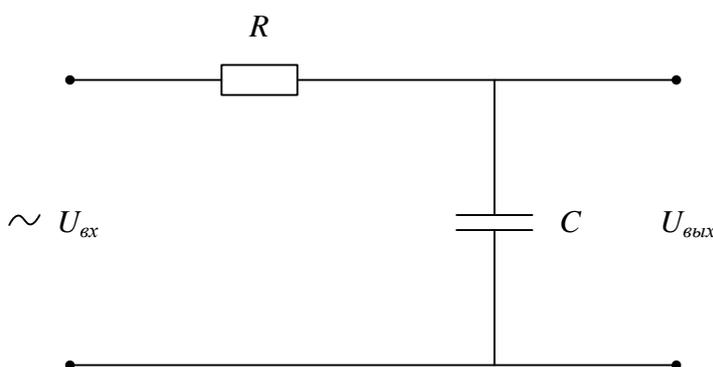


Рис. 4.8. Схема RC-цепочки.

В этом случае уравнение модели имеет вид:

$$T \frac{dU_{\text{вых}}}{dt} + U_{\text{вых}} = kU_{\text{ex}} , \quad (4.29)$$

где  $T = RC$  – постоянная времени данного объекта.

В общем виде также имеем уравнение инерционного статического звена 1-го порядка:

$$T \frac{dy_{\text{вых}}}{dt} + y_{\text{вых}} = kx_{\text{ex}} . \quad (4.30)$$

Кривая разгона отображается уравнением:

$$U_{\text{вых}} = k\Delta U_{\text{ex}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) . \quad (4.31)$$

В случае однократного скачкообразного изменения  $\Delta U_{\text{вх}}$ , в соответствии с уравнением (4.30) кривая разгона отображается градиентом рис.4.9:

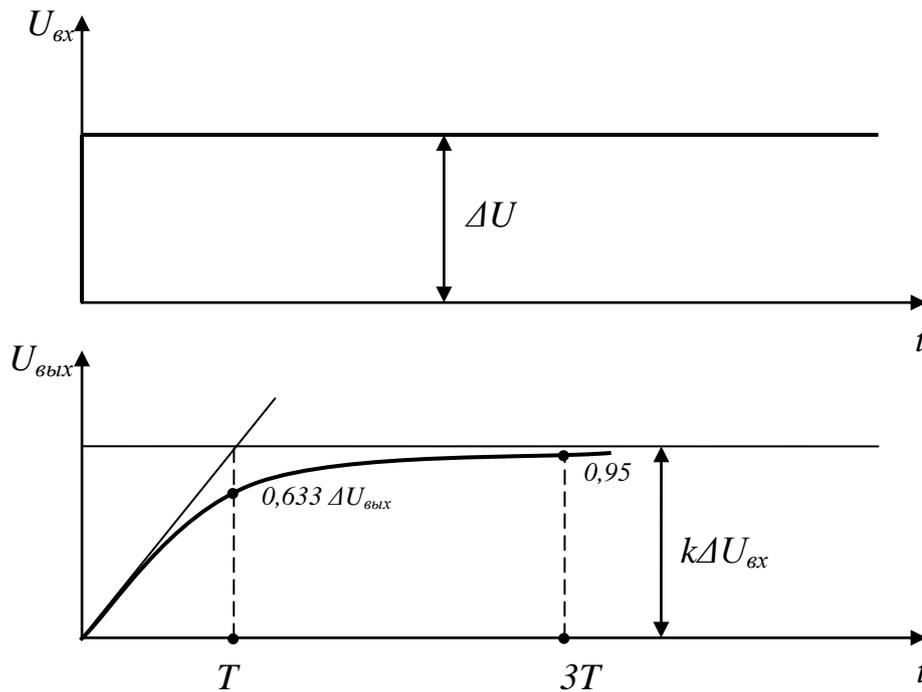
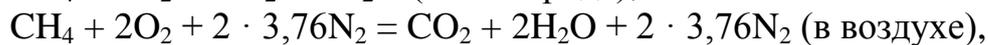
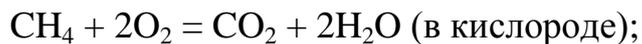


Рис. 4.9. Кривые разгона для RC-цепочки.

Пример 4. Математическая модель и представление процесса горения.

В случае природного газа имеет место стехиометрическая реакция горения:



где  $3,76 = \text{N}_2 / \text{O}_2 = 79 / 21$ .

Горение может происходить без хлопков и проскоков (такой процесс называется нормальным горением) (рис.4.11).

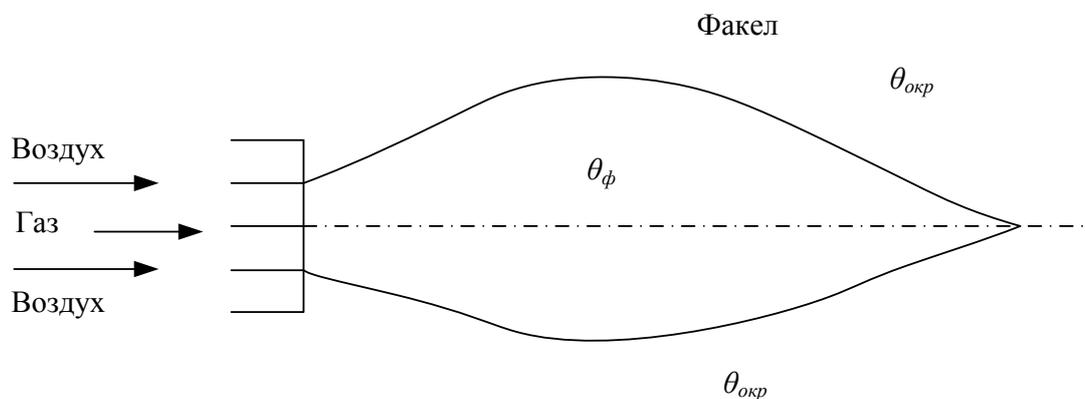


Рис. 4.10. Схема нормального горения газа.

Согласно закону Стефана-Больцмана поток теплоты от факела в окружающую среду:

$$Q_{пот} = \varepsilon_{\phi} \sigma_0 (\theta_{\phi}^4 - \theta_{окр}^4), \text{ т.е.}$$

$$Q_{пот} = f(x_{вых}).$$

Здесь  $\varepsilon_{\phi}$  – степень черноты факела,  $\theta_{\phi}$  и  $\theta_{окр}$  – температуры факела и окружающей среды, соответственно.

В этом случае поток теплоты (сток) зависит от температуры факела, и в первом приближении модель нормального горения может быть описана уравнением статического инерционного звена первого порядка:

$$T_{гор} \frac{d\theta_{\phi}}{dt} + \theta_{\phi} = K_{гор} G_{газа}, \quad (4.32)$$

где  $T_{гор}$  и  $K_{гор}$  – постоянная времени и коэффициент передачи, соответственно;

$G_{газа}$  – расход газа.

Однако при определённых условиях горение газа может переходить во взрыв, если потери теплоты не будут определяться уже температурой горения.

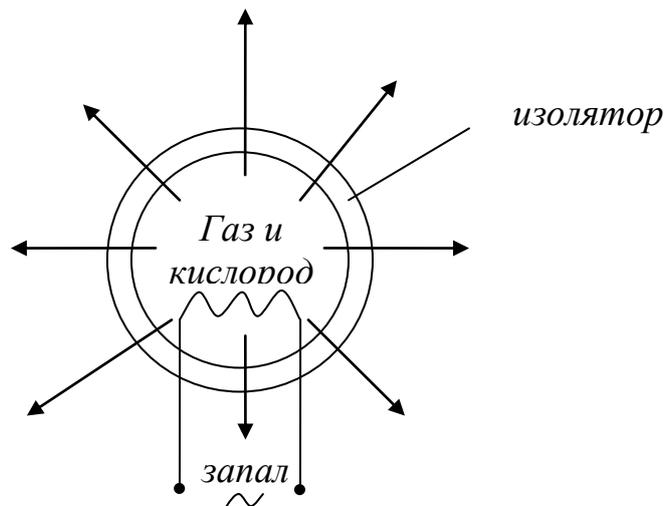


Рис. 4.11. Взрывное горение газа.

Переходу нормального горения во взрыв способствуют условия:

1. Изолированное пространство;
2. Взрывоопасная смесь газа и воздуха (в концентрационных пределах);
3. Наличие запала.

В этом случае  $Q_{ном} = 0$ , а объём газа пропорционален росту температуры газа  $\theta_T$ :  $V_z = V_{z0} \frac{\theta_z}{\theta_{z0}}$ , давление газа также пропорционально росту температуры газа  $P_z = P_{z0} \frac{\theta_z}{\theta_{z0}}$ .

Таким образом, в этом случае сток тепла затруднён, и объект превращается в объект без самовыравнивания  $Q_{ном} \neq f(x_{вых})$ .

В первом приближении упрощенная модель взрыва может быть представлена уравнением:  $\theta_z = \frac{1}{T^*} \int_0^{\infty} V_z dt$  (при очень малой величине  $T^*$ ).

Пример 5. Атомный реактор и ядерный взрыв:

В атомном реакторе цепная реакция протекает при зависимости потерь (стока) тепла  $\theta_{ном}$  от температуры реактора  $\theta_{реакт}$  и в этом случае объект является статическим.

$$Q_{ном} = f(\theta_{реакт});$$

$$Q_{ном} = K_{\Sigma}(\theta_{реакт} - \theta_{охл}).$$

где  $K_{\Sigma}$  – суммарный коэффициент теплоотдачи;  $\theta_{охл}$  – температура охлаждающей жидкости.

Температурную модель атомного реактора в первом приближении также можно представить уравнением статического звена первого порядка

$$T_{реакт} \frac{d\theta_{реакт}}{dt} + \theta_{реакт} = K_{реакт} V_{реакт},$$

где  $V_{реакт}$  – скорость выделения теплоты ядерного горючего.

В случае наличия критической массы и обогащения урана объект теряет свойства самовыравнивания, и это является условием ядерного взрыва, при этом можно записать условие:

$$\theta_{реакт} = \frac{1}{T^*} \int_0^{\infty} Q_{выд} dt,$$

где  $Q_{выд}$  – количество выделяющегося тепла.

### 4.3 Способ детерминированной адаптации регулятора (детерминировано адаптивный регулятор)

Детерминировано адаптивный регулятор относится к области автоматического регулирования, в частности к системам автоматического регулирования по отклонению с отрицательной обратной связью и может быть использовано в любой отрасли, использующей автоматические

регуляторы для целей регулирования параметров состояний объектов управления.

Известен способ адаптации регулятора (корректировки настроек регулятора), включающий идентификацию динамических характеристик объектов автоматического регулирования с помощью математической модели, работающей параллельно с объектом управления и использующей данные откорректированных динамических характеристик для корректирования настроек регулятора, при этом в процессе идентификации на входе объекта вносятся активные возмущающие воздействия. Для определения настроек регулятора (например, для ПИД-регулятора это коэффициент пропорциональности, время интегрирования и время дифференцирования) применяются известные различные методы, например, инженерный метод Копеловича-Круга, метод амплитудно-частотных характеристик (В.Я. Ротача) и др., использующие линейные или линеаризованные модели объекта управления, что и приводит к необходимости коррекции их параметров в процессе функционирования объекта.

Недостатком известного способа является то, что в процессе идентификации динамических характеристик объекта на входе объекта в дискретном режиме наносятся активные возмущающие воздействия, приводящие к динамическим отклонениям регулируемых параметров объекта от заданных значений, что, в свою очередь, приводит к возникновению дополнительных динамических погрешностей и нарушениям технологических процессов. Этот недостаток особенно проявляет себя в условиях все более ужесточающихся требованиях к качеству процессов регулирования. Например, при нагреве под термообработку ответственного оборудования (из стали шх-15, титановых сплавов и т.д.) требуется уже точность регулирования  $\pm 5$  °С и менее. Имеется целый ряд процессов, в которых по требованиям точности регулирования внесение дополнительных возмущающих воздействий исключается по технологическим инструкциям.

Кроме того, при реализации этого способа для проведения идентификации параметров объекта требуется формировать специальные возмущающие воздействия. Например, в виде белого шума, а сам процесс идентификации, основанный на стохастическом методе «черного ящика», протекает дискретно во времени, что приводит к задержке в коррекции настроек регулятора и дополнительным погрешностям в процессе регулирования, особенно ощутимым для сравнительно инерционных объектов регулирования.

В случае использования, так называемых, пассивных методов идентификации объектов при сравнении параметров модели и объекта, находящегося под управлением, требуется очень большое время для получения значимой информации для идентификации модели, так как требуемые для идентификации отклонения входных и выходных величин имеют в этом случае стохастический характер и, вообще, могут не

проявиться (объект находится в процессе регулирования). Общеизвестны многие неудачные примеры пассивной идентификации.

Таким образом, известно устройство по реализации способа адаптации регулятора с использованием активной идентификации параметров объектов регулирования.

Это устройство включает в себя генератор активных воздействий, блок идентификации параметров объекта и блок коррекции настроек регулятора. Недостатком данного устройства является необходимость активного постороннего вмешательства в функционирование объекта, что приводит к дополнительным динамическим ошибкам в процессе регулирования, сложность устройства и длительное время оценки динамических параметров объекта и, следовательно, корректировки настроек регулятора, что, в свою очередь, не позволяет в темпе с процессом проводить адаптацию регулятора.

Способ детерминированной адаптации регулятора дает возможность проводить оценку динамических параметров объекта регулирования и корректировку настроек регулятора без нанесения дополнительных активных возмущающих воздействий и в темпе с процессом, что позволяет улучшить качество регулирования.

В способе адаптации регулятора (определения его настроек) используется условно линейная модель объекта и его нелинейная модель, предназначенная для выявления наиболее значимых нелинейностей в линейной модели объекта и внесении с использованием этих данных и выходных величин объекта регулирования непрерывной во времени коррекции параметров условно линейной модели объекта и соответствующей корректировке настроек регулятора.

Устройство для адаптации регулятора в системе автоматического регулирования содержит кроме блока коррекции настроек регулятора, блок условно линейной модели, блок нелинейной модели, блок коррекции нелинейной модели, связанный с блоком условно линейной модели и воспринимающий сигналы от датчиков выходных параметров объекта.

При реализации коррекции настроек регуляторов используются линейные или линеаризованные модели объектов. В предлагаемом способе используются условно линейные модели, содержащие все формальные признаки линейной модели, но включающие элементы особо значащих нелинейностей, определяемых реальными динамическими свойствами объектов и связанных вследствие этого с выходными его параметрами. Для выявления этих нелинейностей используются более сложные нелинейные модели объектов и с их использованием элементы нелинейностей, выявляемые через выходные параметры объектов и связанные с ними, вставляются в условно линейные модели и используются для корректировки настроек регуляторов. При этом в отличие от известных способов адаптации регуляторов не требуется дискретно вносить активные возмущающие воздействия на вход объектов, а процесс корректировки параметров объекта происходит непрерывно в темпе с процессом.

Наиболее типичным способом представления в линейной модели объектов регулирования и управления в реализации адаптивности регуляторов является инерционное звено первого порядка. При реализации звеньев более высокого порядка используется правило перемножения передаточных функций таких звеньев при их последовательном включении. Эти же звенья используются и при других способах их включения (параллельные, с обратными связями), а также и при линеаризации нелинейностей. В ряде случаев используется звено запаздывания.

При построении дифференциального уравнения линейного инерционного звена в общем случае для самых различных объектов используется обобщенный термодинамический метод (см. гл. 4) и линейное дифференциальное уравнение представляется в виде

$$T \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{вых}} = Kx_{\text{вх}}, \quad (4.33)$$

где  $x_{\text{вых}}$  и  $x_{\text{вх}}$  – выходная и входная величины объектов, соответственно,  $T$  и  $K$  – постоянная времени и коэффициент передачи (усиления) объекта.

Величина  $T$  в свою очередь равна

$$T = R \cdot C, \quad (4.34)$$

где  $R$  – обобщенное сопротивление,  $C$  – обобщенная емкость объекта.

Например, в случае теплового объекта

$$C = mC_{\text{уд}} \quad \text{и} \quad R = \frac{1}{\alpha F}, \quad (4.35)$$

где  $m$  – масса объекта;  $C_{\text{уд}}$  – удельная теплоемкость материала;  $\alpha$  – коэффициент теплопередачи;  $F$  – поверхность нагрева.

В случае регулирования уровня жидкости в ёмкости

$$R = \frac{1}{\mu\omega}, \quad C = F_6, \quad (4.36)$$

где  $\mu$  – коэффициент истечения жидкости;  $\omega$  – площадь проходного сечения отверстия для истечения жидкости;  $F_6$  – площадь поверхности ёмкости.

При этом коэффициент передачи

$$K = \frac{1}{\mu\omega}. \quad (4.37)$$

Данное инерционное звено, таким образом, использует линейную модель (4.35), при этом важнейшие коэффициенты этого уравнения  $T$  и  $K$

принимаются постоянными, что собственно и является признаком линейности модели.

Однако использование более сложных нелинейных моделей реальных объектов позволяет выявить наиболее значимые нелинейности в математическом описании этих объектов и внести корректировки в модель (4.33). При этом оказывается, что эти нелинейности напрямую связаны с выходными величинами объекта.

Так для высокотемпературного теплового объекта при использовании для описания процессов теплообмена закона четвертой степени температур (закона Стефана-Больцмана) вместо закона первых степеней температур (закона Ньютона) величина коэффициента теплоотдачи

$$\alpha_{нел} = \frac{\sigma_{вид}(\theta_n^4 - \theta_m^4)}{\theta_n - \theta_m}, \quad (4.38)$$

где  $\sigma_{вид}$  – видимый коэффициент теплоотдачи излучением;  $\theta_n$  и  $\theta_m$  – температуры печи и металла, соответственно.

В этом случае постоянная времени объекта равна:

$$T_{нел} = \frac{mC_{\omega}}{\alpha_{нел}F}, \quad (4.39)$$

и уравнение (4.33) можно записать в виде уже условно линейного уравнения

$$T_{нел} \frac{dx_{вых}}{dt} + x_{вых} = Kx_{ex}. \quad (4.40)$$

В случае регулирования уровня жидкости при использовании уравнения Бернулли для нелинейной модели объекта постоянная времени объекта равна

$$T_{нел} = \frac{F\sqrt{H}}{\mu\omega}, \quad (4.41)$$

и коэффициент передачи

$$K_{нел} = \frac{\sqrt{H}}{\mu\omega}, \quad (4.42)$$

где  $H$  – уровень жидкости.

С использованием соотношений (4.40) и (4.42) уравнение (4.33) превращается также в условно линейное

$$T_{нел} \frac{dx_{вых}}{dt} + x_{вых} = K_{нел} x_{вх}. \quad (4.43)$$

Из уравнения (4.39), (4.41), (4.42) следует, что коэффициенты (параметры) условно линейной модели объекта напрямую связаны с выходными величинами объекта (в рассматриваемых случаях это температуры печи и металла, уровень жидкости) и их корректировку можно осуществлять путем измерения соответствующих величин.

В случае теплового объекта величина постоянной времени

$$T_{нел} = T \frac{\alpha}{\alpha_{нел}}. \quad (4.44)$$

В случае регулирования уровня жидкости

$$T_{нел} = \sqrt{H} \quad \text{и} \quad K_{нел} = K \sqrt{H}. \quad (4.45)$$

Используя обобщенный термодинамический метод построения математических моделей объектов управления и регулирования, можно находить для любых процессов параметры как линейных, так и условно линейных моделей и определять зависимость параметров условно линейных моделей от выходных параметров объектов, внося соответствующую коррекцию в значения коэффициентов модели по мере изменения выходных параметров объекта. Это позволяет использовать корректируемые непрерывно в темпе с процессом с учетом изменения выходных параметров объектов коэффициенты настройки регуляторов. Так методике Копеловича настройки ПИД-регулятора определяются для апериодического процесса по формулам

$$K_p = \frac{0,95T}{K\tau_{зан}}, \quad T_u = 2,4T_{об}, \quad T_d = 0,4 T_{об}, \quad (4.46)$$

где  $K_p$ ,  $T_u$  и  $T_d$  – настройки регулятора – коэффициент пропорциональности, время интегрирования и время дифференцирования, соответственно;  $\tau_{зан}$  – время запаздывания.

Как следует из уравнения (4.46), основным параметром, определяющим настройки регулятора является постоянная времени объекта, и в случае ее корректировки настройки соответственно изменяются.

В случае если модель объекта состоит из нескольких включенных линейных звеньев, с их использованием строится кривая разгона (кривая переходного процесса), по ней известными методами определяется время запаздывания и постоянная времени объекта, а корректировка постоянной времени осуществляется описанным выше методом с использованием условно линейной модели и данных о выходных параметрах объекта.

Предлагаемый способ реализуется посредством устройства, блок-схема которого приведена на рис. 4.12.

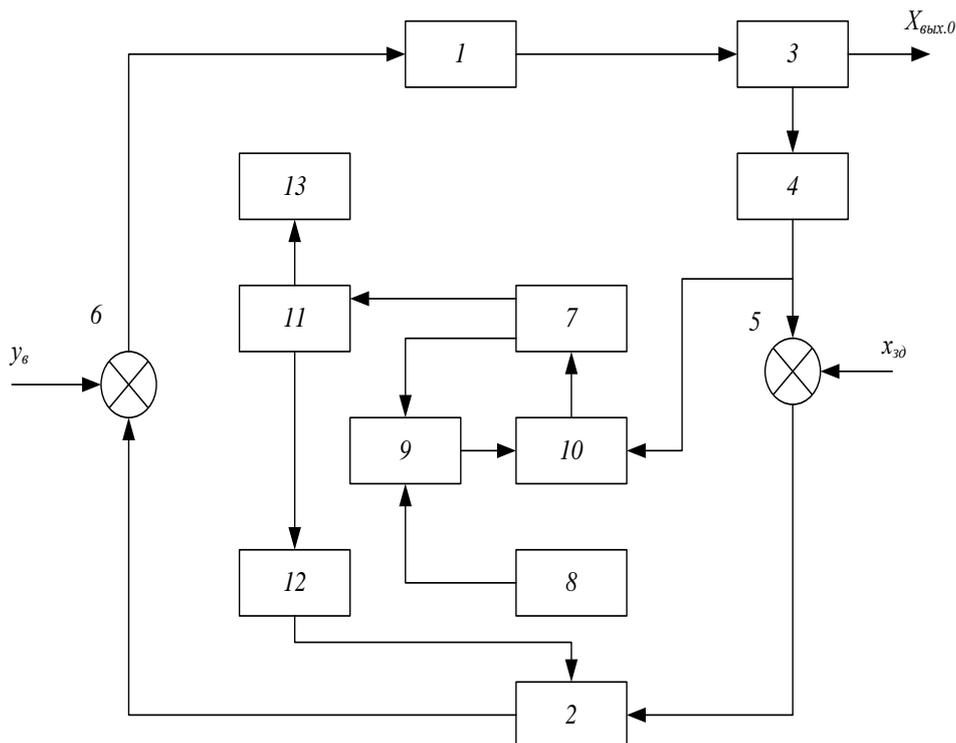


Рис. 4.12. Устройство адаптации регулятора.

Устройство содержит объект регулирования 1, имеющий входные  $x_{вх.о}$  и выходные  $x_{вых.о}$  параметры, регулятор 2, датчики выходных параметров 3, блок оценивания выходных параметров объекта 4, элемент сравнения 5 выходной величины  $x_{вых.о}$  с заданным значением  $x_{зд}$  и формирующий входную величину регулятора  $x_{вх.р.} = x_{вых.о} - x_{зд}$ , элемент сравнения 6 выходной величины регулятора  $x_{вых.р.}$  с возмущающим воздействием  $y_v$  блок коррекции настроек регулятора 7, блок коррекции настроек регулятора 8, блок условно линейной модели объекта 9, блок нелинейной модели объекта 10, блок сравнения параметров условно линейной и нелинейной модели 11, блок нелинейной коррекции параметров условно линейной модели 12.

Устройство работает следующим образом. Датчики выходных параметров 3 в совокупности с блоком оценивания 4, регулятор 2, элементы сравнения 5 и 6 осуществляют регулирование по отклонению с отрицательной обратной связью (с компенсацией возмущенной  $y_v$  за счет выходной величины регулятора  $x_{вых.р.}$ ).

Блок условно линейной модели 9 содержит формально линейную модель объекта с вставленными нелинейностями, определяемыми с помощью выходных величин объекта  $x_{вых.о}$ . В блоке сложной нелинейной модели 10 формируется нелинейная модель объекта 1. С использованием моделей блока 9 и 10 в блоке 11 проводится их сравнение, и выявляются необходимые поправки в виде нелинейностей, вставляемых в условно линейную модель блока 9. Реализация этой поправки проводится блоком нелинейной коррекции 11, в которую поступает сигнал от датчиков 3 и блока оценивания 4 выходной величины объекта  $x_{вых.о}$ . В блоке оценивания 4 проводится

требуемая для процесса регулирования корректировка выходных величин объекта  $x_{\text{вых.о}}$  и их отфильтровывание от шумов и других случайных помех.

Поправка, непрерывно учитывающая изменение динамических свойств объекта в его нелинейной составляющей, зависящей от изменения выходных параметров объекта, таким образом, непрерывно вносится в блок 9. С использованием корректируемых значений динамических характеристик объекта в блоке 7 проводится расчет настроек регулятора, результаты этого расчета используются с помощью блока 8 для корректировки настроек регулятора.

Примеры конкретного выполнения расчёта.

Пример 1. Регулирование температуры в термической печи для термообработки титановых сплавов.

Этот пример является весьма типичным для многих весьма ответственных технологических процессов, в которых осуществляется нагрев и плавление самых различных материалов, при этом требования к равномерности и точности нагрева к настоящему времени часто достигают уже метрологически предельных значений ( $\pm 5 \text{ }^\circ\text{C}$ ).

Первоначально найденные с использованием линейной модели (4.33) и соотношений (4.35) значения времени запаздывания и постоянной времени объекта – печи для термообработки титановых сплавов  $\tau_{\text{зан}} = 10 \text{ с}$ ,  $T = 150 \text{ }^\circ\text{C}$  при коэффициенте теплоотдачи  $\alpha = 300 \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К})$  (блок 9, рис. 4.12).

Нелинейная модель (блок 10), как отмечалось ранее, включает основную нелинейность объекта в виде зависимости коэффициента теплоотдачи от температуры печи и температуры металла (уравнение (4.38)). В устройстве температура печи измеряется термопарой, температура металла – радиационным пирометром (блок 3).

Первоначальные значения (с использованием параметров линейной модели) настроек ПИД–регулятора при выборе апериодического процесса регулирования в блоке 7 определяются по соотношениям (4.46):

$$K_p = \frac{0,95 \cdot 150}{1 \cdot 10} = 14,25 \quad T_u = 2,4 \cdot 150 = 360 \text{ с}; \quad T_D = 0,4 \cdot 150 = 60 \text{ с}$$

В процессе нагрева при термообработке титановых сплавов температура печи изменяется от  $\theta_n'' = 1600 \text{ }^\circ\text{C} = 1873 \text{ К}$  до  $\theta_n'' = 1800 \text{ }^\circ\text{C} = 2073 \text{ К}$ ; температура металла от  $\theta_m = 20 \text{ }^\circ\text{C} = 292 \text{ К}$  до  $\theta_m = 850 \text{ }^\circ\text{C} = 1123 \text{ К}$ . В процессе работы детерминированного адаптивного регулятора непрерывно в процессе нагрева заготовок с использованием показаний датчиков температуры печи и металла вносятся изменения в динамические характеристики объекта (в данном случае в значение постоянной времени  $T$ ) и соответственно корректируются настройки ПИД–регулятора.

В блоке 12 происходят конкретные вычисления требуемых поправок на нелинейность объекта, а в блоке 7 – расчет настроек регулятора (см. рис.4.12).

В качестве примера ниже приведены эти расчеты для начала и конца процесса нагрева.

По формуле (4.38) при определенном значении  $\sigma_{вид} = 3,2 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>):

для начала нагрева

$$\alpha_{нел}^н = \frac{3,2 \cdot 10^{-8} (1873^4 - 293^4)}{1873 \cdot 293} = 249,1 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К});$$

для конца нагрева

$$\alpha_{нел}^к = \frac{3,2 \cdot 10^{-8} (2073^4 - 1123^4)}{2073 \cdot 1123} = 568,5 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}).$$

В блоке 11 по рассчитанным значениям  $\alpha_{нел}$  с использованием в данном случае формулы (4.44) определяются скорректированные значения постоянной времени, в частности:

для начала нагрева

$$T_{нел}^н = 150 \frac{300}{249,1} = 180,7 \text{ с};$$

для конца нагрева

$$T_{нел}^к = 150 \frac{300}{568,5} = 79,15 \text{ с}.$$

Эти скорректированные данные через блок условно линейной модели 9 поступают в блок 7, в котором рассчитываются скорректированные значения настроек ПИД-регулятора, в частности:

для начала нагрева

$$K_p^n = \frac{0,95 \cdot 180,7}{1 \cdot 10} = 17,2; \quad T_u^n = 2,4 \cdot 180,7 = 433,7 \text{ с}; \quad T_d^n = 0,4 \cdot 180,7 = 72,3 \text{ с};$$

для конца нагрева

$$K_p^к = \frac{0,95 \cdot 79,15}{1 \cdot 10} = 7,5; \quad T_u^к = 2,4 \cdot 79,15 = 190,0 \text{ с}; \quad T_d^к = 0,4 \cdot 79,15 = 31,7 \text{ с}.$$

Рассчитанные настройки из блока 7 поступают в блок 8 для непрерывной  $x$  по мере нагрева в печи корректировки настройки регулятора 2.

Как видим, по ходу нагрева значения динамических параметров объекта изменяются в 2,3 раза, соответственно изменяются и настройки регулятора.

В блоке нелинейной модели 10 выявляется и другая существенная для процесса нагрева нелинейность линейной модели (4.33) – зависимость удельной теплоемкости нагреваемого материала  $C_{yд}$  от температуры материала  $\theta_m$  (см. соотношения (4.35)). Большинство материалов характеризуются ростом удельной теплоемкости с температурой. Например, для цветных сплавов достаточно типичной является температурная зависимость типа

$$C_{yд} = C_o + 2\alpha_t \theta, \quad (4.47)$$

где  $C_0$  – теплоемкость сплава при  $0$  °С;  $\alpha_t$  – температурный коэффициент теплоемкости,  $\theta$  – температура °С.

Отметим, что для титана в диапазоне нагрева от  $0$  до  $850$  °С удельная теплоемкость изменяется всего лишь на  $12\%$ . Однако для ряда материалов – стали, чугун – диапазон этого изменения может составлять до  $1,5$  –  $2$  раз. В этом случае, как следует из формул (4.34) и (4.35), соответствующим образом значительно изменяется и нелинейная постоянная времени объекта и согласно формулам (4.46), настройки регулятора. Таким образом, диапазон требуемых изменений настроек регулятора в процессе нагрева различных материалов может достигать до  $3$  –  $5$  раз и более.

Непрерывная по ходу нагрева корректировка настроек регулятора без дискретного нанесения каких-либо возмущений в объект управления позволяет обеспечить процесс регулирования с минимальными динамическими отклонениями и при отсутствии искусственно вносимых динамических отклонений. В случае рассматриваемого примера требуемая точность нагрева  $\pm 5$  °С и нанесение каких-либо дополнительных возмущений исключается по технологической инструкции, а следовательно, использование известных методов адаптации регулятора в этом случае становится неприемлемым.

#### Пример 2. Регулирование уровня жидкости.

Этот пример является также весьма типичным для многих технологических процессов, особенно в металлургии, химии, деревообработке и т.д. При этом требования к точности регулирования непрерывно возрастают. Так в металлургии при регулировании уровня в кристаллизаторе установки непрерывной разливки металла диапазон регулирования уровня составляет не более  $100$  –  $150$  мм, при этом отклонения от требуемых значений приводят к самым серьезным аварийным ситуациям. Внесение каких-либо возмущающих воздействий для идентификации модели объекта и адаптации регулятора при этом исключаются.

Первоначально найденное с использованием линейной модели (4.35) и соотношений (4.36) и (4.37) значения для регулирования уровня жидкости в диффузионном химическом аппарате значения времени запаздывания и постоянной времени объекта – емкости с жидкостью составили  $\tau_{\text{зап}} = 15$  с,  $T = 200$  °С. Коэффициент передачи объекта  $K = 1,2$  м/(м<sup>3</sup>/с) (блок 9, рис. 4.12).

Нелинейная модель (блок 10) включает основную нелинейность объекта в виде зависимостей (4.41) и (4.42).

В данном объекте уровень жидкости измеряется с помощью емкостного уровнемера.

Первоначальные значения настроек ПИД-регулятора (с использованием параметров линейной модели) при выборе апериодического закона регулирования определяются по соотношениям (4.43)

$$K_p = \frac{0,95 \cdot 200}{1,2 \cdot 15} = 10,6 \frac{м^3/с}{м}; T_u = 2,4 \cdot 200 = 480 с; T_d = 0,4 \cdot 200 = 80 с.$$

В процессе регулирования уровня в данном технологическом процессе изменение уровня происходит в пределах от 2 м до 0,8 м.

В процессе изменения уровня в данном диапазоне непрерывно с использованием показаний датчика уровня вносятся изменения в динамические характеристики объекта (постоянная времени, коэффициент передачи) и соответствующие корректировки настроек регулятора.

В качестве примера приведем расчет динамических характеристик объекта регулирования и настроек ПИД-регулятора для крайних случаев изменения диапазона уровня.

По формулам (4.45):

для значения  $H = 0,8$  м

$$T_{нел} = 200 \sqrt{0,8} = 178,8 с; K_{нел} = 1,2 \sqrt{0,8} = 1,073 \frac{м}{м^3/с}$$

для значения  $H = 2$  м

$$T_{нел} = 200 \sqrt{2} = 282,8 с; K_{нел} = 1,2 \sqrt{2} = 1,70 \frac{м}{м^3/с}.$$

Таким образом, в процессе регулирования динамические характеристики данного объекта изменяются почти в 1,6 раза.

Эти скорректированные данные через блок условно линейной модели 9 поступают в блок 11, в котором рассчитываются скорректированные значения настроек ПИД-регулятора, в частности:

при  $H = 0,8$  м

$$K_p = \frac{0,95 \cdot 178,8}{1,073 \cdot 15} = 10,5 \frac{м^3/с}{м}; T_u = 2,4 \cdot 178,8 = 429,1 с; T_d = 0,4 \cdot 178,8 = 1,5$$

с.

при  $H = 2,0$  м

$$K_p = \frac{0,95 \cdot 282,8}{1,7 \cdot 15} = 10,5 \frac{м^3/с}{м}; T_u = 2,4 \cdot 282,8 = 678,7 с; T_d = 0,4 \cdot 282,8$$

=1,5 с.

Как видим, в процессе регулирования уровня коэффициент пропорциональности регулятора в данном случае не изменяется. Однако время интегрирования и время дифференцирования данного объекта изменяются в соответствии с изменением постоянной времени объекта также почти в 1,6 раза. Адаптация настроек регулятора позволяет обеспечить непрерывное поддержание требуемого качества регулирования.

Отметим, что вторым источником нелинейности модели данного объекта является зависимость возможного коэффициента истечения жидкости  $\mu$  от режима истечения (скорость истечения температуры жидкости и т.д.).

Например, зависимость коэффициента истечения от температуры особенно существенна для вязких жидкостей, например, нефтепродуктов. В

этом случае требуется использование датчика температуры жидкости и внесения поправок в динамические характеристики объекта с использованием зависимости

$$\mu = f(\theta_m), \quad (4.48)$$

где  $\theta_m$  – температура жидкости.

Корректировка динамических характеристик объекта и настроек регулятора проводится аналогичным образом.

Таким образом, предлагаемый способ и устройство детерминированной адаптации регулятора позволяет без внесения дополнительных возмущений в объект проводить в непрерывном режиме (в темпе с процессом) коррекцию настроек регуляторов и тем самым увеличить как динамическую, так и статическую точность процессов автоматического регулирования.

#### **4.4 Обобщенный термодинамический подход как основа детерминированной процедуры построения полной математической модели объектов с распределенными параметрами**

Исключительно стохастические подходы к построению полных математических моделей объектов с распределенными параметрами являются в значительной степени еще менее реалистичными, чем такие же подходы для объектов с сосредоточенными параметрами вследствие значительно большей сложности объектов с распределенными параметрами.

Поэтому на стадии создания топологии и структуры математической модели необходим детерминированный подход с последующими процедурами параметрической идентификации (адаптация модели) на базе натуральных экспериментов. При этом требования к математической модели должны быть такими, чтобы свести к минимуму потребности в параметрической идентификации (в идеале свести их к нулю) вследствие отсутствия натурности на стадии проектирования и сложности проведения натуральных экспериментов и идентификации.

Особенностью объектов с распределенными параметрами является, как известно, введение в рассмотрение внутренних координат системы, рассмотрение полей параметров состояния, что с математической точки зрения приводит к рассмотрению уравнений в частных производных, субстанциональных производных, дивергенций и т.д.

Учитывая большое разнообразие видов переноса в процессах тепломассообмена (перенос энергии, количества движения, вещества, энергии турбулентных вихрей) и само разнообразие механизмов переноса энергии

(электромагнитное излучение, конвекция, теплопроводность, контактная теплопередача), для выработки единых подходов и упрощения построения математических моделей целесообразно применить положения обобщённого термодинамического подхода, в общих чертах сформулированного в работах Б. Н. Петрова. Для объектов с сосредоточенными параметрами развитие этого метода проведено в работах В. Б. Яковлева. Применительно к объектам с распределёнными параметрами принципы обобщённого термодинамического подхода сформулированы В. Г. Лисиенко. При таком подходе удаётся найти общность в написании основных уравнений для моделей различных видов переноса вещества и энергии, основываясь на известном принципе аналогии. Тем самым существенно облегчается и ускоряется процедура поиска топологии и структуры математических моделей самых различных процессов и, что особенно важно, создаются предпосылки для создания одного из самых современных методов расчёта процессов теплообмена – динамического зонально-узлового метода (ДЗУ-метода), в котором органически сочетается детализированное моделирование в динамике всех видов теплопереноса с синхронным расчётом газодинамики процессов. При этом естественно применяются процедуры параметрической идентификации (адаптация моделей на базе натуральных экспериментов).

Отметим, что процесс проектирования энерготехнологических объектов и АСУ ТП для них на современном этапе необходимо рассматривать как единый неделимый процесс, так как современные агрегаты должны проектировать в едином комплексе с АСУ ТП. Использование математических моделей в виде, так называемого, имитационно-оптимизирующего блока является необходимым для уменьшения ошибок проектирования, сокращения наладочных сроков, предотвращения аварийных ситуаций.

Особенно большое значение использование таких моделей в виде имитационно-оптимизирующего блока имеет для разработки верхних уровней АСУ ТП технологических процессов, что на современном этапе имеет очень большое значение.

Для объектов с распределёнными параметрами технологический процесс в наиболее обобщенном виде может быть представлен в виде, так называемой, обменной (переносной) модели, включающей обрабатываемую и обрабатывающую среды с обобщенными потоками  $W_1$  и  $W_2$  и поверхностью взаимодействия  $F$ , для которых задаются условия сопряжения и условия на внешних границах (рис. 4.13).

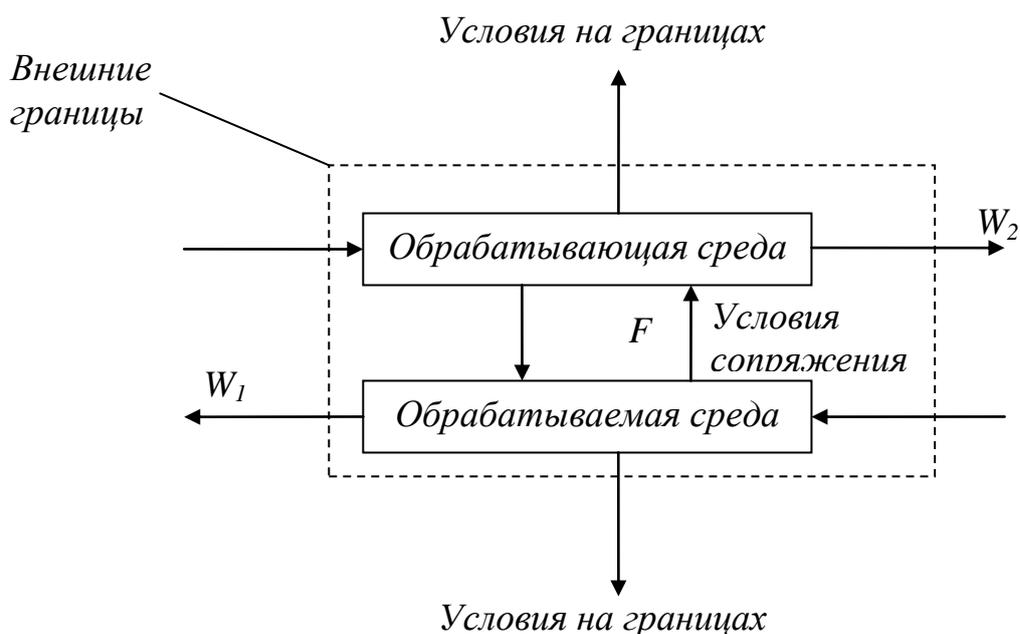


Рис. 4.13. Характерная структура обменной (переносной) модели объекта с распределёнными параметрами.

### Представление обобщённого термодинамического подхода.

Большое практическое значение в настоящее время имеют проблемы, связанные с энерготехнологиями, и методы математического моделирования для этих технологий находят все большее применение, особенно на этапах предпроектных исследований.

В связи с этим, следуя традициям обобщённого термодинамического подхода, рассмотрим структуру детерминированной модели с распределёнными параметрами на примере уравнения переноса энергии в движущейся вещественной среде.

Математическая модель с распределёнными параметрами может быть представлена в следующем общем виде:

$$Y(t) = f[X(t), t, x_{\text{внутр}}, u_{\text{внутр}}, z_{\text{внутр}}],$$

где  $Y(t)$  и  $X(t)$  – выходная и входная величина модели;  $x_{\text{внутр}}$ ,  $u_{\text{внутр}}$  и  $z_{\text{внутр}}$  – координаты внутренние для этого объекта.

В последующем материале примеры использования обобщённого термодинамического подхода связаны с решением практически важных общетехнических задач радиационного и сложного теплообмена. Эти задачи являются поистине общетехническими, так как находят применение в самых разных областях науки и техники, в энергетике, энерготехнологиях, при решении аэродинамических и космических задач и т.д.

В качестве примера рассмотрим объект с распределёнными параметрами – поток газовых или жидкостных сред при его движении в каналах (рис. 4.14).

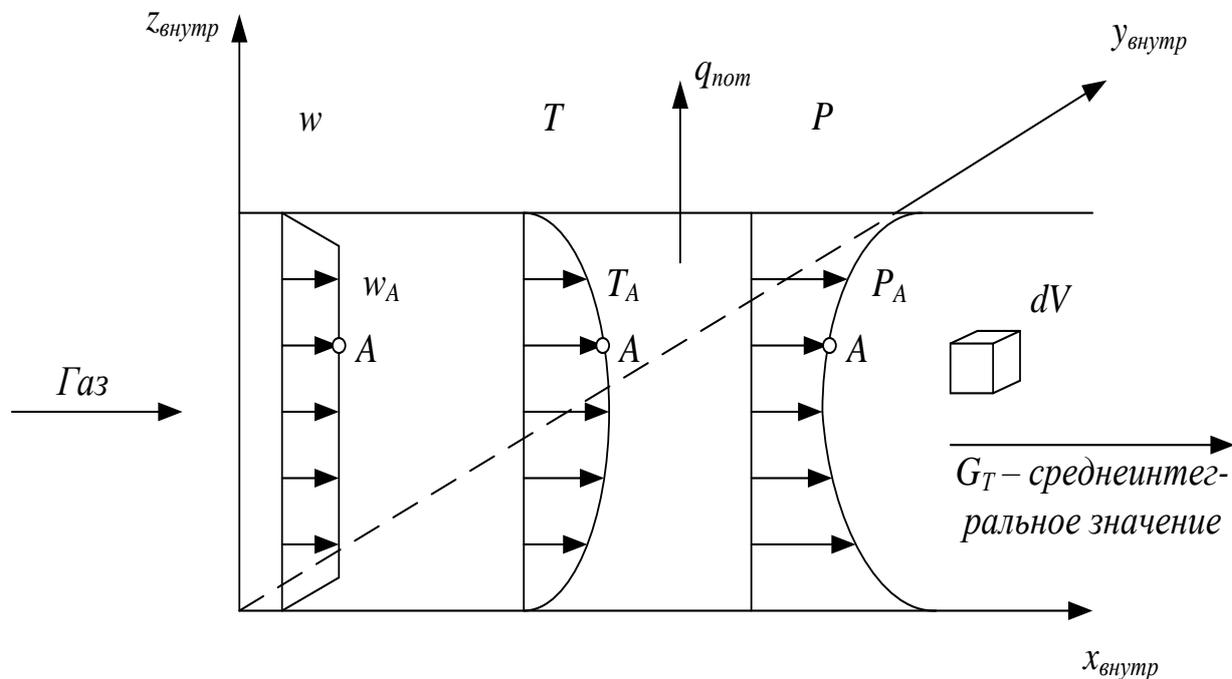


Рис. 4.14. Пример объёма с распределёнными параметрами (движения газа в канале):  $w$ ,  $T$  и  $P$  – скорость, температура и давление газа соответственно; индекс  $A$  – локальное значение параметров в точке  $A$ ;  $dV$  – выделяемый элементарный объём газа;  $q_{пот}$  – потери во внешнюю среду.

Уравнение сохранения и распространения энергии в движущейся вещественной среде (перенос энергии) может быть записано в виде (для элемента объёма  $dV$  – рис. 4.14):

$$Q_e = dt + L_v dt = \rho \left( du + d \frac{w^2}{2} \right), \quad (4.49)$$

где  $Q_e$  – теплота подведённая извне;  
 $L_v$  – работа совершаемая над объёмом газа;  
 $\rho$  – плотность среды;  
 $u$  – внутренняя энергия;  
 $w$  – скорость;  
 $t$  – время.

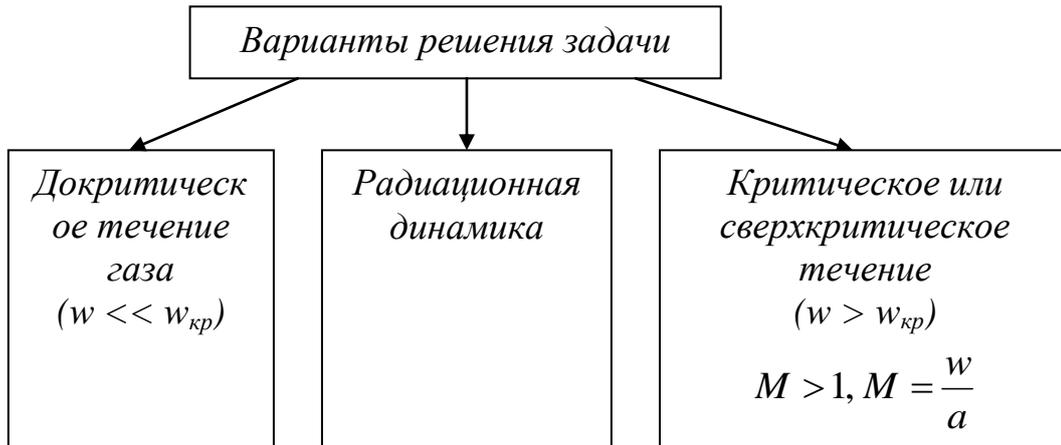


Рис. 4.15. Варианты решения уравнения (4.48) для прикладных задач:  $w_{кр}$  – скорость звука для критического режима (скорость газа в критическом сечении сопла Лаваля);  $a$  – скорость звука в данной среде;  $M$  – критерий Маха.

При этом скорость звука в данной среде  $a = \sqrt{kRT}$ ;  $k = \frac{c_p}{c_v}$ ,

где  $k$  – показатель адиабаты;

$c_p$  и  $c_v$  – удельные теплоёмкости при постоянном давлении и объёме, соответственно;

$R$  – газовая постоянная;

$T$  – абсолютная температура газа, К.

В ряде практически важных технологических случаях можно использовать решения уравнения (4.49) для случая докритической скорости газа и пренебречь работой  $L_v$ .

Для этого варианта:

$$d \frac{w^2}{2} = 0; L_v = 0.$$

Величина внутренней энергии газа изобарного процесса (процесса происходящего при постоянном давлении) может быть представлена в виде:

$$du = di + dA$$

При  $dA = 0$ :  $du = di = c_p dT$ , здесь  $i$  – энтальпия – теплосодержание газа при постоянном давлении.

При этих допущениях из уравнения (4.49) следует:

$$Q_g dt = \rho di \text{ и } Q_g = \rho \frac{di}{dt}. \quad (4.50)$$

Величину  $Q_g$  можно записать в виде:

$$Q_s = q_v - \operatorname{div} \vec{q}_t + \operatorname{div} \vec{q}_l \quad (4.51)$$

где  $q_v$  – внутреннее тепловыделение в объёме газа (источниковый член);

$q_T$  – теплота, отданная во внешнюю среду за счёт теплопередачи теплопроводностью;

$q_l$  – теплота электромагнитного излучения.

Следует учитывать, что дивергенция вектора  $\vec{M}$  равна:

$$\operatorname{div} \vec{M} = \frac{dM}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dM}{dz}$$

В соответствии с законом Фурье:

$$\operatorname{div} \vec{q}_T = - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right], \quad (4.52)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;

$T$  – температура газа.

Формулу (4.51) можно представить в виде:  $\operatorname{div} \vec{q}_T = -\operatorname{div}(\lambda, \operatorname{grad}(T))$ .

При предположении, что  $\lambda = \text{const}$ , формула (4.52) приобретает вид:

$$\operatorname{div} q_T = -\lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = -\lambda \nabla^2 T. \quad (4.53)$$

Полную производную от  $i$  по  $t$  можно выразить в виде частных производных:

$$\frac{di}{dt} = \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial i_x}{\partial t} + \frac{\partial i_y}{\partial t} + \frac{\partial i_z}{\partial t} = \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial i}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial i}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial i}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial z}.$$

Обозначая величины  $\frac{\partial x}{\partial t} = w_x$ ;  $\frac{\partial y}{\partial t} = w_y$ ;  $\frac{\partial z}{\partial t} = w_z$ , как скорости газа по соответствующим координатам получаем:

$$\frac{di}{dt} = \frac{\partial i}{\partial t} + w_x \frac{\partial i}{\partial x} + w_y \frac{\partial i}{\partial y} + w_z \frac{\partial i}{\partial z} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \operatorname{div}(w, i),$$

или при  $c_p = \text{const}$ :

$$\frac{di}{dt} = \frac{\partial i}{\partial t} + c_p \operatorname{div}(\vec{w}, T).$$

С учётом вспомогательных уравнений (4.51) – (4.53) уравнение (4.50) приводится к виду:

$$\rho \frac{\partial i}{\partial t} = \underbrace{q_v}_{\text{источниковый член}} + \underbrace{\text{div}(\lambda, \text{grad} T)}_{\text{градиентный член}} - \underbrace{\rho c_p \text{div}(\vec{w}, T)}_{\text{конвективный член}} + \underbrace{\text{div} \vec{q}_L}_{\text{излучение}}. \quad (4.54)$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = q_v + \text{div}(\lambda, \text{grad}) - \rho c_p \text{div}(\vec{w}, T) + \text{div} \vec{q}_L, \quad (4.55)$$

В уравнениях (4.54) и (4.55) член в левой части представляет собой динамическую компоненту, в правой части представлены последовательно источниковый член, градиентный и конвективные члены и член теплообмена излучением.

Для решения теплофизических задач подобные уравнения для теплообменивающихся сред дополняются уравнениями неразрывности (сплошности) потока, движения, массопереноса, химического реагирования, граничными условиями.

Наличие в одном уравнении (4.55) столь разных по своей физической природе составляющих требует особых подходов при составлении математической модели высшего уровня и разработке методов их решения. В течение ряда лет под руководством В. Г. Лисиенко и в работах его учеников проводился комплекс работ по разработке таких моделей и методов решения, обеспечивающий приложимость разработанных методик к сложным реальным условиям функционирования плавильных и нагревательных устройств. При этом появилась возможность учёта таких важнейших факторов как интегральных и локальных характеристик сложного радиационно-конвективно-кондуктивного теплообмена, факельных процессов для пламенных печей, селективности излучения участвующих в теплообмене сред, сложной перестраиваемой геометрии, движения газов и нагреваемого материала, различных свойств нагреваемого материала и т.д. (см.гл.5).

Основой для численного решения уравнения (4.55) являются конечно-разностные схемы, при которых теплофизический объект (рабочее пространство печей, камеры сгорания, топки котельных установок) разбивается на сравнительно крупные элементы – зоны. Поэтому метод получил название метода крупной сетки, или зонального метода. Размер зон определяется в основном количеством выделенных зон, при этом разумное (с позиции точности и быстродействия) количество зон составляет около 200-300, что приводит к появлению зон сравнительно больших размеров.

Однако наиболее полно требования к имитационно-оптимизирующей модели процессов сложного теплообмена и массообмена удовлетворяет на современном этапе динамический зонально-узловой метод расчёта (ДЗУ-метод), позволяющий в дополнение к зональной методике более детально рассчитывать в динамике поля температур в органическом сочетании с расчетами гидродинамических процессов и процессов горения.

Для обеспечения процедур оптимизации тепломассобменные модели дополняются моделями оптимизации, например, типа метода линейного программирования и др.

Система уравнений (4.55) для обрабатывающей и обрабатываемой сред дополняется также условиями сопряжения, граничными и нулевыми условиями.

Исходя из основных принципов обобщённого термодинамического подхода, вводя представление о динамическом члене и субстанциональной производной для объектов с распределёнными параметрами и основываясь на примере переноса энергии в движущейся вещественной среде, обобщённое уравнение переноса для обрабатываемой и обрабатывающей сред (см. рис. 4.13) можно представить в следующем обобщённом виде.

Тогда в обобщённой форме уравнение (4.55) с учётом (4.54) можно представить в виде:

$$\rho \frac{d\varphi}{dt} = q_v + \text{div}(\Gamma, \text{grad}\varphi) - \rho \text{div}(\vec{w}\varphi) + \text{div}\vec{q}_L, \quad (4.56)$$

Представительность данного уравнения как обобщенного для различного вида переноса веществ или энергии может быть продемонстрирована на примере градиентного члена – в приложении к различным видам градиентного переноса (табл. 4.1).

Для гидродинамических явлений при этом  $q_v = \text{grad}P$

Таблица 4.1.

Пример использования обобщённого уравнения для различных видов градиентного переноса.

Перенос	Величины $\varphi$	Закон градиентного переноса	Значение $\Gamma$
Энергии	Энтальпия $i$ (температура $T$ )	Фурье	Коэффициент теплопроводности, $\lambda$
Количества движения	Скорость $w$	Навье-Стокса	Динамическая вязкость, $\mu$
Вещества	Масса $i$ -го компонента $m_i$	Фика	Коэффициент диффузии, $D$
Энергии турбулентных вихрей	Степень турбулентности $K_T$	Фика	Коэффициент диффузии вихрей, $D_v$

Наиболее часто применяемые приемы аппроксимации системы (4.55) для технологических объектов заключаются в следующем.

В случае упрощенных одномерных (вдоль оси  $x$ ) линейных противоточных моделей система уравнений (4.56) с условиями сопряжения часто сводится к виду:

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = -\frac{K_{\Sigma} y w_{1x}}{W_2} (\varphi_2 - \varphi_1), \quad (4.57)$$

где  $K_{\Sigma}$  – суммарный коэффициент обмена;  
 $y$  – поперечная координата;  
 $w_{1x}$  – скорость обрабатываемой среды вдоль продольной координаты.

Индекс 1 относится к обрабатываемой среде, индекс 2 – к обрабатывающей среде.

Например, для случая теплообмена:  $W_2$  – теплоемкость потока,  $\varphi$  – температура,  $K_{\Sigma}$  – коэффициент теплообмена.

В уравнении (4.57) для случая физико-химического обмена на рис. 4.14 величины  $W_1$  и  $W_2$  представляют собой поток массы,  $\varphi_2$  и  $\varphi_1$  – текущую и равновесную концентрации реагентов,  $K_{\Sigma}$  – коэффициент массообмена.

В случае перехода от объектов с распределенными параметрами к объектам с сосредоточенными параметрами уравнение (4.57) приводится к известному виду:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{K\varphi_B}{T} = -\frac{1}{T} \varphi_B, \quad (4.58)$$

где  $K$  – коэффициент передачи;

$T = RC$  – постоянная времени;

$R$  и  $C$  – обобщенные сопротивления и емкость объекта;

$\varphi_B$  – входной параметр объекта.

## Глава 5. Основные методы решения задач применительно к объектам с распределёнными параметрами. Метод конечных разностей

Метод конечных разностей в основном заключается в переходе от дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений к алгебраическим, путём замены производных на конечные отрезки и выделения определённых узлов и зон. Классификация этих методов в нашей интерпретации представлена на рис. 5.1.

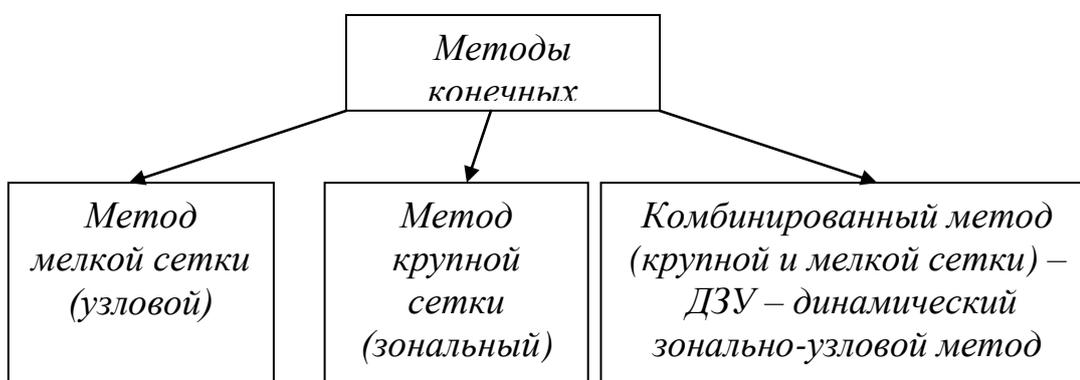


Рис. 5.1. Методы конечных разностей.

Применение этих методов в данном учебном пособии демонстрируем на примере решения таких общеинженерных задач как перенос энергии в движущейся вещественной среде. Эти задачи являются характерными для самых различных технических систем: энергетика, металлургия, стройматериалы, транспорт, космическая техника и т.д. При этом важнейшим является рассмотрение процессов радиационного и сложного теплообмена в совокупности с процессами движения газообразных и жидких сред – газодинамика и динамика жидких сред.

При решении этих задач используются системы нелинейных уравнений и естественно численные конечно-разностные методы. Применяется метод крупной сетки-зональный метод, в основном связанный с радиационным теплообменом и мелкой сетки для решения задач гидродинамики. Этот метод получил название динамический зонально-узловой метод (ДЗУ-метод), или двухсеточный метод.

## 5.1 Основы динамического зонально-узлового метода

На современном этапе решение задач теплообмена применительно к АСУ ТП требует учета как динамики нагрева (как кладки, так и нагреваемого материала), так и учета газодинамики и процессов кондуктивного переноса в газообразной – теплопередающей и в тепловоспринимающей среде. Таким образом, с учетом наличия радиационного переноса возникает задача сложного теплообмена, в котором системы уравнений типа (4.47), (4.48) должны применяться к трем основным обменным компонентам – движущимся средам: теплопередающей – газообразной, тепловоспринимающей – твердой или жидкой и обмуровке-кладке. При этом переносная модель, в общем, виде представленная на рис. 4.13 применительно к процессам теплообмена в системе трех тел "газ-кладка-материал", принимает вид рис. 5.2.

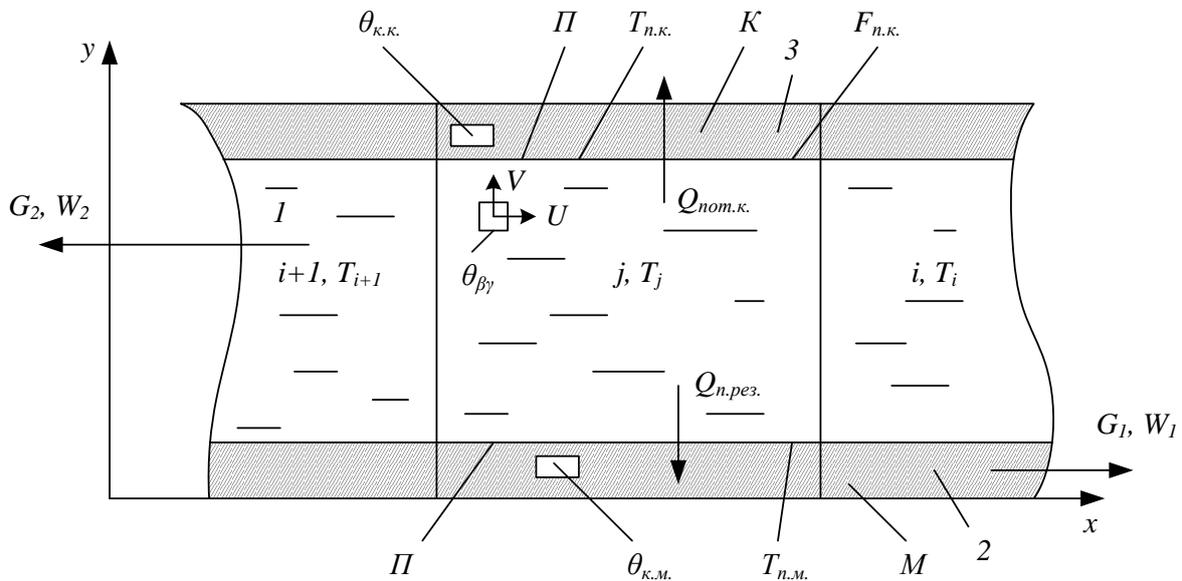


Рис. 5.2. Геометрический абрис модели динамического зонально-узлового метода расчета радиационного и сложного теплообмена (на примере противотока) в системе трех термически массивных движущихся сред: вязкой теплоотдающей (1), сплошной – тепловоспринимающей – обрабатываемой (2) и кладки-обмуровки (3):  $M$  – металл,  $K$  – кладка,  $\Pi$  – поверхность;  $Q_{п.рез.}$  и  $Q_{пот.к.}$  – результирующие тепловые потоки на поверхность обрабатываемой среды и кладки;  $T_{н.м.}$  и  $T_{н.к.}$  – температуры поверхности металла и кладки, соответственно;  $G$  и  $W$  – расход и теплоёмкость потока; индекс «1» относится к металлу, «2» – к газу.

При использовании зонального и динамического зонально-узлового метода достаточно сложную задачу представляет определение селективных коэффициентов радиационного обмена в уравнении (5.5)  $A_{ij}^{\Sigma}$  и  $A_j^{\Sigma}$ . Эти величины могут быть представлены следующим образом:

для объемных зон

$$A_{ij}^{\Sigma} = \frac{4V_i}{T_i^4} \int_0^{\infty} K_i^{\lambda} f_{ij}^{\lambda} E_{0\lambda} d\lambda, \quad (5.1)$$

$$A_j^{\Sigma} = \frac{4V_i}{T_j^4} \int_0^{\infty} K_j^{\lambda} (1 - f_{jj}^{\lambda}) E_{0\lambda} d\lambda, \quad (5.2)$$

для поверхностных зон:

$$A_{ij}^{\Sigma} = \frac{F_i}{T_i^4} \int_0^{\infty} \varepsilon_i^{\lambda} f_{ij}^{\lambda} E_{0\lambda} d\lambda, \quad (5.3)$$

$$A_j^{\Sigma} = \frac{F_j}{T_j^4} \int_0^{\infty} \varepsilon_j^{\lambda} (1 - f_{jj}^{\lambda}) E_{0\lambda} d\lambda, \quad (5.4)$$

где  $V$  и  $F$  – объем и поверхность зон,  $\text{м}^3$  и  $\text{м}^2$ ;  $K^{\lambda}$  и  $\varepsilon^{\lambda}$  – спектральные коэффициент поглощения,  $1/\text{м}$  и степень черноты зоны;  $E_{0\lambda}$  – спектральная плотность полусферического излучения, определяемая функцией Планка для абсолютно черного тела,  $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{мкм})$ ;  $f_{ij}^{\lambda}$  и  $f_{jj}^{\lambda}$  – спектральные приведенные разрешающие угловые коэффициенты излучения;  $\lambda$  – длина волны излучения,  $\text{мкм}$ .

Таким образом, при определении величины  $A^{\Sigma}$  возникает задача оценки величин спектральных приведенных разрешающих угловых коэффициентов излучения  $f^{\lambda}$ , представляющих долю энергии излучения зоны  $i$  достигшей зоны  $j$  с учетом поглощения энергии в объеме газовой среды и отражения от ограничивающих объем поверхностей.

В наших работах предложено определять эти коэффициенты, предварительно оценив обобщенные угловые коэффициенты излучения  $\Psi_{ij}^{\lambda}$ , и далее осуществлять переход к разрешающим угловым коэффициентам излучения через решение системы линейных уравнений (см. уравнение типа (5.24) и (5.25)).

Обобщенные коэффициенты излучения  $\Psi_{ij}$  представляют долю энергии излучения зоны  $i$ , достигшей зоны  $j$  только лишь с учетом поглощения в объеме газа (без учета отражения окружающими объем поверхностями). Их определение в сложных условиях рабочего пространства энергетических установок представляет непростую задачу.

Для определения обобщенных и разрешающих угловых коэффициентов излучения в настоящее время применяются такие эффективные математические методы, как метод Монте-Карло, метод квадратур Гаусса. В работах Уральского государственного технического университета - УПИ

(под руководством В. Г. Лисиенко) при анализе процессов теплообмена в пламенных печах зональным методом использовался метод Монте-Карло для определения обобщенных угловых коэффициентов, а разрешающие угловые коэффициенты находят решением системы линейных уравнений. Для учета селективных свойств излучающих сред в комплексе с селективными свойствами поверхностей были предложены селективно-серые модели спектров излучения газов.

До последнего времени применительно к реальным объектам управления эта комплексная задача не была решена: отдельно решались уравнения теплообмена и газодинамики, при этом учет динамики нагрева, как правило, не проводился.

К настоящему времени разработаны приемы, позволяющие стыковать решения уравнений конечно-разностным методом в рамках крупной сетки (в зональной постановке) для учета процессов радиационного переноса и в рамках мелкой сетки (узлов) для учета процессов кондуктивного переноса и газодинамики. При этом удастся учитывать динамику нагрева. В целом этот метод, разработанный под руководством В. Г. Лисиенко, определяется как динамический зонально-узловой метод (ДЗУ-метод). И может в настоящее время являться основой для разработки моделей процессов нагрева третьего уровня управления. Для решения конкретных задач могут использоваться отдельные элементы метода. В целом метод опирается на следующие основные положения .

1. В основу решения системы (4.48) положен многозональный подход (метод крупной сетки), связанный с разбиением системы из движущихся газов и нагреваемых материалов, кладки на  $m$  объемных и  $n$  поверхностных зон (см. рис. 5.7). И записью системы уравнений теплового баланса и теплопередачи (в записи радиационного члена через селективные коэффициенты радиационного обмена  $A_{ij}^{\Sigma}$  и  $A_j^{\Sigma}$  для зоны  $j$  в среднезональной постановке).

С учетом динамической составляющей в уравнении (4.48) система уравнений  $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m+n-1} A_{ij}^{\Sigma} T_i^4 - A_j^{\Sigma} T_j^4 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^l g_{ij} T_i - g_j T_j + Q_j = 0$  в конечно-разностной (дискретной) интерпретации приобретает вид (для зоны  $j$ ):

$$(\rho c_p)_j \frac{\Delta T_j}{\Delta t} V_j = Q_j + \sum_{i=1}^l g_{ij} T_i - g_j T_j + \sum_{i=1}^{m+n-l} A_{ij}^{\Sigma} T_i^4 - A_j^{\Sigma} T_j^4, \quad (5.5)$$

где  $m$  и  $n$  – число объемных и поверхностных зон модели;

$A_{ij}^{\Sigma}$  и  $A_j^{\Sigma}$  – селективные коэффициенты радиационного обмена;

$g_{ij}$  и  $g_j$  – коэффициенты конвективного обмена;

$Q_j$  – источниковый член;  $V_j$  – объем зоны  $j$ ;

$T_i$  и  $T_j$  – температуры соответственно зон  $i$  и  $j$ ;

$\Delta T_j$  – приращение температуры в зоне  $j$  за шаг по времени  $\Delta t$ .

При этом динамика теплопереноса учитывается разбиением времени на конечные отрезки  $\Delta t$  с изменением температуры на этом шаге  $\Delta T_j$ .

При переносе тепла массой из объемной зоны  $i$  в зону  $j$  имеем:

$$g_{ij} = c_i G_{ij} = W_i; \quad g_i = c_j G_j = W_j.$$

В случае конвективного обмена теплом между объемной и поверхностной зоной

$$g_{ij} = g_i = \alpha_{kj} F_j,$$

где  $c_i$  и  $c_j$  – теплоемкость газов зон  $i$  и  $j$ , Дж/(кг·К);  $G_{ij}$  и  $G_j$  – массовый приход газов из зоны  $i$  в зону  $j$  и расход газов из зоны  $j$ , кг/с;  $\alpha_{kj}$  – коэффициент теплоотдачи конвекций на границах зон  $i$  и  $j$ , Вт/(м<sup>2</sup>·К)

Важнейшей задачей численного решения систем уравнений математической модели на основе ДЗУ-метода является стыковка системы зональных уравнений (крупнозональная сетка) с уравнениями переноса энергии в нагреваемом материале и вязкой газообразной среде. В этих средах осуществляется градиентный перенос, и для численного решения уравнения применяются конечно-разностные методы с использованием относительно мелкой (узловой) сетки. Этой стыковки удалось достигнуть усреднением узловых температур и соответственно приведением их к среднезональным  $T_j$  для поверхностных и объемных зон.

2. Для нагреваемого материала и кладки-обмуровки используется уравнение энергии и теплопроводности в движущейся среде для среды  $k$  в форме

$$\rho_k c_k \frac{\partial \theta_k}{\partial t} + \rho_k c_k w_k \frac{\partial \theta_k}{\partial x} \nabla (\lambda_k \nabla \theta_k) - q_{вн.k} = 0, \quad (5.6)$$

с условием сопряжения и усреднением температуры  $\theta_{k\Pi}$  на поверхностной зоне  $\Pi$

$$\sum_{i=1}^{m+n-1} A_{ij}^{\Sigma} T_i^4 - A_{j\Pi}^{\Sigma} T_{j\Pi}^4 + \frac{\lambda_{j\Pi}}{S_{j\Pi}} (T_{j\Pi} - T_0) F_{\Pi} = \lambda_k \left. \frac{\partial \theta_k(y,t)}{\partial y} F_{\Pi} \right|_{F_{\Pi}}, \quad (5.7)$$

$$T_{j\Pi} = \int_{F_{\Pi}} \theta_{k,\Pi} dF_{\Pi}, \quad (5.8)$$

где  $\lambda_{j\Pi}$  и  $S_{j\Pi}$  – коэффициент теплопроводности и толщина пограничного слоя;

$T_{j\Pi}$  и  $T_0$  – температура пограничного слоя и температура у поверхности;

$F_{\Pi}$  – площадь поверхностной зоны  $j_{\Pi}$ ;

$\rho_k$  и  $c_k$  – плотность и удельная теплоемкость среды;

$\theta_k$  – температура;

$w_k$  – скорость движения в направлении  $x$ ;

$\lambda_k$  – теплопроводность;

$q_{вн.k}$  – источниковый член.

Уравнения (5.37), (5.38) и (5.39) соответствуют типичному случаю для практического приложения: движению материала в направлении  $x$  и переносу теплоты теплопроводностью в направлении  $y$ .

3. Применяется уравнение энергии и для потока несжимаемой вязкой жидкости (газа) – обрабатываемой среды (двумерный случай):

$$\rho c_p U \frac{\partial \theta}{\partial x} + \rho c_p V \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_T}{Pr_T} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_T}{Pr_T} \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} + q^x + q^p, \quad (5.9)$$

где  $\rho$  и  $c_p$  – плотность и теплоемкость среды;

$U$  и  $V$  – продольная и поперечная компоненты скорости;

$\theta$  – температура среды;

$\mu_T$  и  $Pr_T$  – турбулентная вязкость и турбулентное число Прандтля;

$q^x$  – мощность тепловыделений за счет химических реакций;

$q^p$  – теплота, подводимая излучением.

Для стыковки крупной и мелкой сеток предложено проводить усреднение среднезональной температуры в зоне  $j$  по соотношению

$$T_j = \left[ \frac{1}{V_j} \sum_{\delta} \theta_{\beta\gamma}^4 V_{\beta\gamma} \right]^{\frac{1}{4}}, \quad (5.10)$$

с определением плотности теплового потока, подводимого за счет излучения к узлу  $(\beta, \gamma)$  в зоне  $j$

$$q_{\beta\gamma}^p = \frac{1}{V_j} \left[ Q_j^p - A_j^{\Sigma j} (T_j^4 - \theta_{\beta\gamma}^4) \right] \quad (5.11)$$

и оценкой результирующего потока тепла излучением к зоне  $j$  по формуле

$$Q_j^p = \sum_{i=1}^{m+n-1} A_{ij}^{\Sigma} T_i^4 - A_j^{\Sigma} T_j^4, \quad (5.12)$$

где:  $\delta$  – число узлов сетки;

$\beta\gamma$  – узел;

$A_j^{\Sigma j}$  – коэффициент радиационного обмена, пропорциональный покидающему зону  $j$  потоку собственного излучения.

Определённые по соотношению (5.10) среднезональные температуры  $T_j$  используются в зональном уравнении (5.36), что и обеспечивает стыковку систем зональных и градиентных уравнений и проведение итерационных процедур.

Как указывалось, для реализации численного решения системы уравнений (5.37) и (5.39) представляются в конечно-разностной (дискретной)

форме с применением сравнительно небольших шагов по координатам сетки  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и  $\Delta z$  (мелкая или узловая сетки). Стыковка численных решений на зональной (крупной сетке) по системе уравнений (5.36) и на узловой (мелкой сетке) по системам уравнений (5.37) проводится, как уже отмечалось, путем использования усреднений температур (5.39). Для численного решения системы конечно-разностных нелинейных уравнений в совокупности с системами уравнений (5.38) могут применяться различные эффективные итерационные методы, обеспечивающие быстроедействие и сходимость алгоритмов: комбинированные неявно-явные схемы, метод Ньютона-Рафсона и др.

4. Данная система дополняется уравнениями сохранения массы и движения (уравнением Навье-Стокса) для решения задачи гидродинамики в газовой среде, причем турбулентная вязкость определяется, например, из "К- $\epsilon$ " модели турбулентности.

Например, в криволинейных ортогональных координатах (двумерный случай) уравнения неразрывности и гидродинамики имеют вид

$$\frac{\partial \rho \gamma}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial G_j}{\partial x_j} = 0, \quad (5.13)$$

$$\rho \frac{\partial (l_i V_i)}{\partial t} + L(V_i) + q_{i\Sigma} + \frac{\partial p}{\partial x_j} = 0, \quad (5.14)$$

где:  $L(V_i)$  – градиентный оператор;

$q_{i\Sigma}$  – источниковый член.

Оператор  $L(V_i)$  и конвективный источниковый член  $q_i$  имеют следующую форму:

$$\left. \begin{aligned} L(V_i) &= \frac{1}{S_i} \sum_{j=1}^2 \left[ \frac{\partial (G_j V_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu_T \frac{S_j}{l_j} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right]; \\ q_i &= \frac{V_i}{S_i} \left( \frac{G_j}{l_j} \frac{\partial l_i}{\partial x_j} - \frac{G_j}{l_i} \frac{\partial l_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (5.15)$$

$j=2$  для  $i=1$  и  $i=2$ .

Здесь  $x$  – криволинейные координаты;  $S$  – площади грани объема,  $l$  – коэффициенты Ламе;  $i$  и  $j$  – индексы компонент.

Отметим, что уравнение типа (5.10), по существу, является видоизменённой частью обобщенного уравнения (4.46) с основой на

градиентном члене  $L(V_i)$ . В обобщенной форме подобного типа уравнение используется для ряда переменных  $\varphi_i$  – (см. таблицу 4.1) – кроме скорости  $V_i$  – для энергии турбулентных пульсаций  $K_i$  и их диссипации  $\varepsilon_i$ , а также концентрации горючего и окислителя  $c_i$ . В этом случае в рамках данной модели оно используется для вычисления коэффициентов модели турбулентности  $K$  и  $\varepsilon$ , а также для расчетов процессов перемешивания и горения.

При этом в такой обобщенной форме в прямоугольных координатах уравнение (5.14) принимает форму, типичную для трехмерных моделей и отражающую основные особенности табл. 4.1 (см. также уравнение (4.55)).

$$\rho \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = q_v + \operatorname{div}(\Gamma \operatorname{grad} \varphi_i) - \rho w \operatorname{grad} \varphi_i, \quad (5.16)$$

где  $\varphi_i$  – рассматриваемый параметр (скорость, энергия трубных пульсаций и их диссипаций, концентрация топлива и окислителей),  $\Gamma$  – градиентный параметр (теплопроводность, динамическая вязкость, коэффициент диффузии); для гидродинамических явлений при этом  $q_v = \operatorname{grad} \rho$ .

В настоящее время реализация ДЗУ-метода и его отдельных элементов доведена до прикладных программ. Как составные части этого метода разработаны дополнительные блоки: алгоритмы и программы. Это экспресс-методы определения обобщенных коэффициентов излучения; двухэтапный метод (Монте-Карло – линейная система) определения разрешающих угловых коэффициентов излучения; 9-, 2- и многополосные модели спектров излучения газов и модели излучения сажистых частиц пламени; определение локальных характеристик; решение внутренней задачи теплопроводности на криволинейной сетке; определение эффективной теплопроводности слоистых материалов и штабелей огнеупоров; оценка рассеяния; расчеты угловых коэффициентов при сложной геометрии; модели выгорания, подсоса и сажевыделения по длине факелов и др.

## 5.2 Основы метода Монте-Карло

Метод Монте-Карло основан на применении генератора равномерно распределённых случайных чисел.

Если  $p(x)$  – плотность вероятности появления случайных чисел, то для равномерно распределённых случайных чисел  $\gamma$  в интервале  $(0 \div 1)$ ,  $p(x) = 1$  (рис. 5.3).

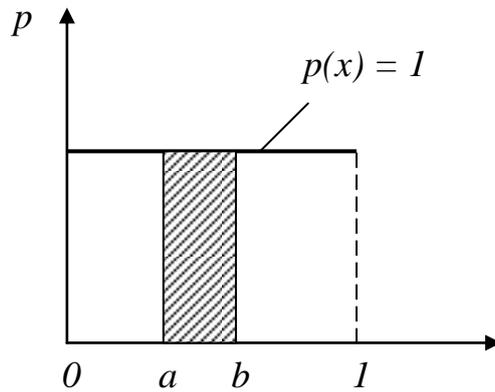


Рис. 5.3. Плотность вероятности равномерно распределённых случайных чисел.

В случае  $\gamma = 0 \div 1$  распределение случайных чисел в интервале (рис. 5.3) равно величине этого интервала  $ab$ .

Рис. 5.4 иллюстрирует общий принцип определения интеграла (площадь  $J$ ) с использованием генератора равномерно распределённых случайных чисел (в двумерной постановке).

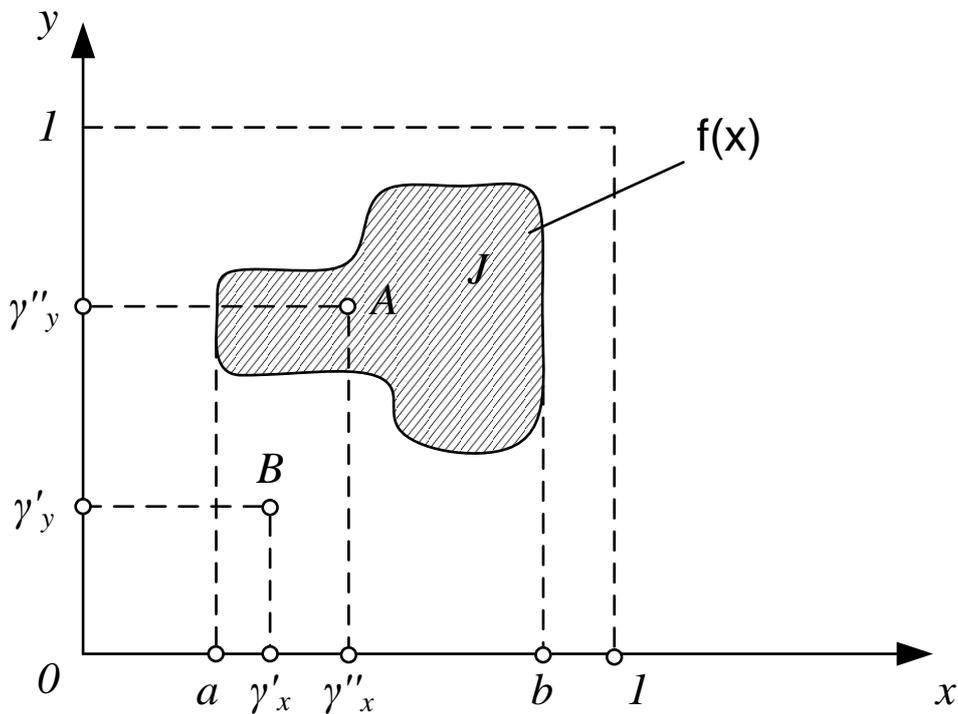


Рис. 5.4. Иллюстрация определения интеграла методом Монте-Карло.

Площадь, выделенная на рис. 5.4 заштрихованного участка, может быть представлена интегралом функции  $f(x)$

$$J = \int_a^b f(x) dx .$$

При использовании метода Монте-Карло интеграл функции  $f(x)$   $J = \int_a^b f(x) dx$  представляется в виде вероятности попадания точек с координатами  $\gamma_x, \gamma_y$  в пределы площади  $J \approx P(x)$ . Тогда величина  $J$  может быть определена как:

$$J \approx P(x) = \frac{N_J}{N_\Sigma} , \quad (5.17)$$

где  $N_J$  – число точек, достигших площади  $J$  (пример, точка А на рис. 5.4);

$N_\Sigma$  – общее число точек.

При этом погрешность определения интеграла определяется формулой (рис. 5.5):

$$\delta = \sqrt{\frac{D}{N}} \cdot 100\% , \quad (5.18)$$

где  $D = \psi \cdot (1 - \psi)$ ;

$N$  – число измерений;

$\psi$  – значение интеграла.

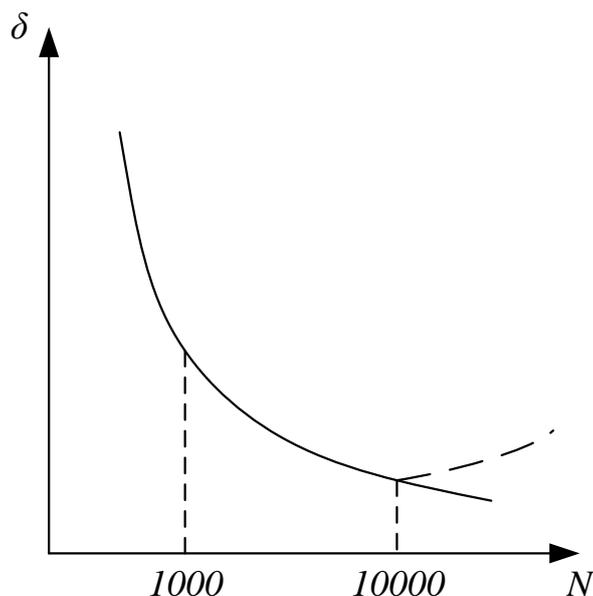


Рис. 5.5 Характер зависимости погрешности определения интеграла методом Монте-Карло от числа испытаний  $N$ . Пунктир – возможное возрастание  $\delta$  в случае несовершенства генератора псевдослучайных чисел.

Важной особенностью использования метода Монте-Карло является возможность перехода от равномерно распределённых случайных чисел к неравномерно распределённым случайным числам, при этом формула перехода имеет вид:

$$\gamma = \int_0^{\eta} P(x) dx, \quad (5.19)$$

где  $\eta$  – неравномерно распределённая случайная величина.

Например, если величина:

$$P(x) = \frac{1}{b-a} \quad (5.20)$$

т.е. граница случайных чисел определяется на отрезке  $(b, a)$ , то по формуле (5.19):  $\gamma = \int_a^{\eta} \frac{dx}{b-a} = \frac{\eta-a}{b-a}$  и  $\eta = \gamma(b-a) + a$ .

Например, при  $b=10, a=0$  и  $\gamma=0,1$  величина  $\eta=1$ .

### **Определение обобщённых угловых коэффициентов излучения при использовании зонального метода.**

Характерным примером использования метода Монте-Карло является определение интеграла, представляющего обобщённый угловой коэффициент излучения  $\psi_{ij}$ . Он, как отмечалось, определяет долю излучения с поверхности  $Q_i^{\Sigma}$ , достигшего поверхности  $Q_j$  с учётом поглощения энергии, например, излучения в объёме на линии луча  $S$ , т.е. обобщённый угловой

коэффициент излучения:  $\psi_{ij} = \frac{Q_{j \text{ погл}}}{Q_i^{\Sigma}}$ .

Представление об обобщённом угловом коэффициенте излучения даёт рисунок 5.6.

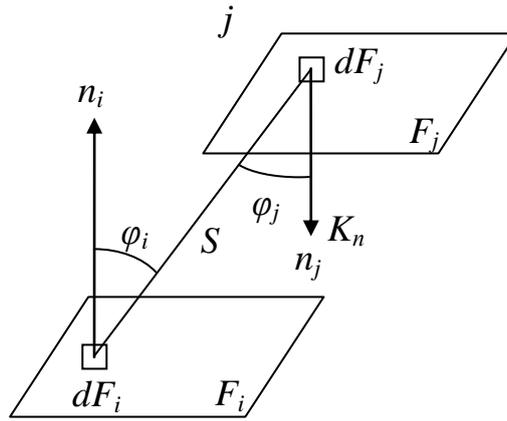


Рис. 5.6. Схема к определению обобщённого углового коэффициента излучения.

При определении  $\psi_{ij}$  поглощение энергии излучения в объёме среды учитывается по закону Бугера-Бера. На рис. 5.6:  $K_n$  – коэффициент поглощения потока излучения;  $dF_i$ ,  $dF_j$  – элементарные площадки;  $S$  – длина луча;  $i$ ,  $j$  – плоскости;  $\varphi_i$ ,  $\varphi_j$  – углы между направлением луча и нормальям к поверхностям  $n_i$  и  $n_j$ .

По закону Бугера-Бера поглощение энергии излучения в объёме среды определяется величиной длины луча  $S$  и коэффициентом поглощения  $K_n$  по экспоненциальному закону. Тогда с использованием закона Ламберта (закон косинусов) и Бугера-Бера для излучения от поверхности величина  $\psi_{ij}$  определяется формулой:

$$\psi_{ij} = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} \int_{F_j} \frac{\cos \varphi_i \cos \varphi_j}{\pi S^2} e^{-K_n S} dF_i dF_j. \quad (5.21)$$

Задачей метода Монте-Карло как раз и является в данном случае определение интеграла, характеризуемого формулой (5.21) т.е. величины  $\psi_{ij}$ .

Метод Монте-Карло может в задачах, связанных с излучением, использоваться и при учёте отражения потоков излучения от поверхностей и рассеивания излучения в объёмах.

### 5.3 Метод Монте-Карло, основанный на принципе узлового разбиения

Сущность узлового разбиения и основные изменения, внесенные в расчетную схему метода Монте-Карло, заключается в следующем (рис. 5.7):

1. Имеющиеся в излучающей системе поверхности задаются алгебраическим уравнением 2-го порядка в общем виде с целью наиболее

полного охвата и воспроизведения возможных конфигураций моделируемых объектов.

2. В объеме излучающей системы и на каждой поверхностной зоне (конечная поверхность) задается рациональное число узловых точек, относительно которых и проводится расчет локальных характеристик лучистого теплообмена. Такой подход позволяет гибко варьировать геометрией поглощающих объемов и поверхностей (см. рис 5.7). С другой стороны, в этом случае около каждого поверхностного узла  $N$  образуется поверхностная зона с площадью  $F_N$ . Объемные зоны могут быть заданы совокупностью объемных узлов  $N$ .

3. Число узлов разбиения для какой-либо зоны задается прежде всего в зависимости от исследуемого положения и формы факела, а также от предполагаемой неравномерности распределения температуры по поверхности или в объеме. Однако в сторону увеличения число узлов лимитируется статистической погрешностью, возникающей в связи с использованием в расчете случайных чисел.

4. Для расчета распределения поглощенной энергии в среде используется метод аналитического осреднения. Согласно пространственному распределению излучательной способности поверхности (в частности, закону Ламберта), из каждого поверхностного узла испускается серия пучков энергии (лучей), поглощение каждого из которых исследуется по мере прохождения через среду. При использовании узлового разбиения (см. рис. 5.7) учет поглощения пучка энергии в среде с переменной оптической плотностью осуществляется на каждом шаге следования луча, величина которого  $\Delta l$  постоянна для выбранного случайного направления и ориентировочно задается как параметр расчета из условий требуемой точности и характера узлового разбиения в объеме модели. При этом поглощенная энергия в зависимости от геометрической ориентации луча распределяется между соответствующими объемными узлами.

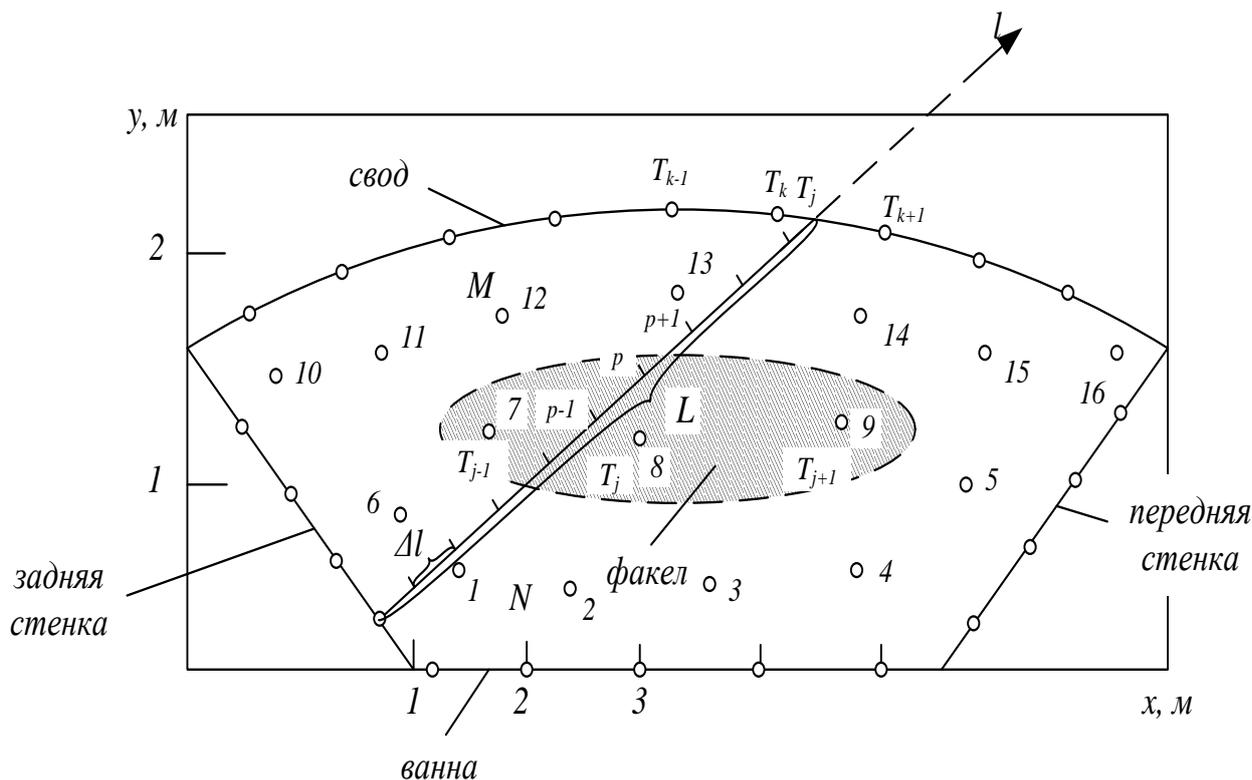


Рис. 5.7. Пример узловой модели внешнего теплообмена (профиль сталеплавильной печи, цифры у точек – номера объемных узлов);  $N$  – поверхностный узел;  $M$  – объемный;  $l$  – направление луча при определении поглощения излучения в объеме среды.

Можно показать, что разбиение конечной длины луча шагом постоянной величины правомерно при использовании метода аналитического осреднения. Так, для одного луча в данном интервале длин волн  $\Delta l$  и направлении аналитически вычисляется вероятность поглощения энергии на отрезке до границы объема (см. рис. 5.7) согласно выражению

$$p\{l < 1\} = 1 - \exp\left(-\int_0^L K_{\Pi}^{\lambda}(\Delta\lambda, x(l)) dl\right), \quad (5.22)$$

где  $K_{\Pi}^{\lambda} = (\Delta\lambda, x(l))$  – спектральный коэффициент поглощения среды,  $\text{м}^{-1}$ ;

$x$  – направление одной из координат, в котором задан закон изменения коэффициента поглощения;

$l$  – одно из вероятностных направлений излучения, получаемое случайной выборкой (см. рис. 5.8).

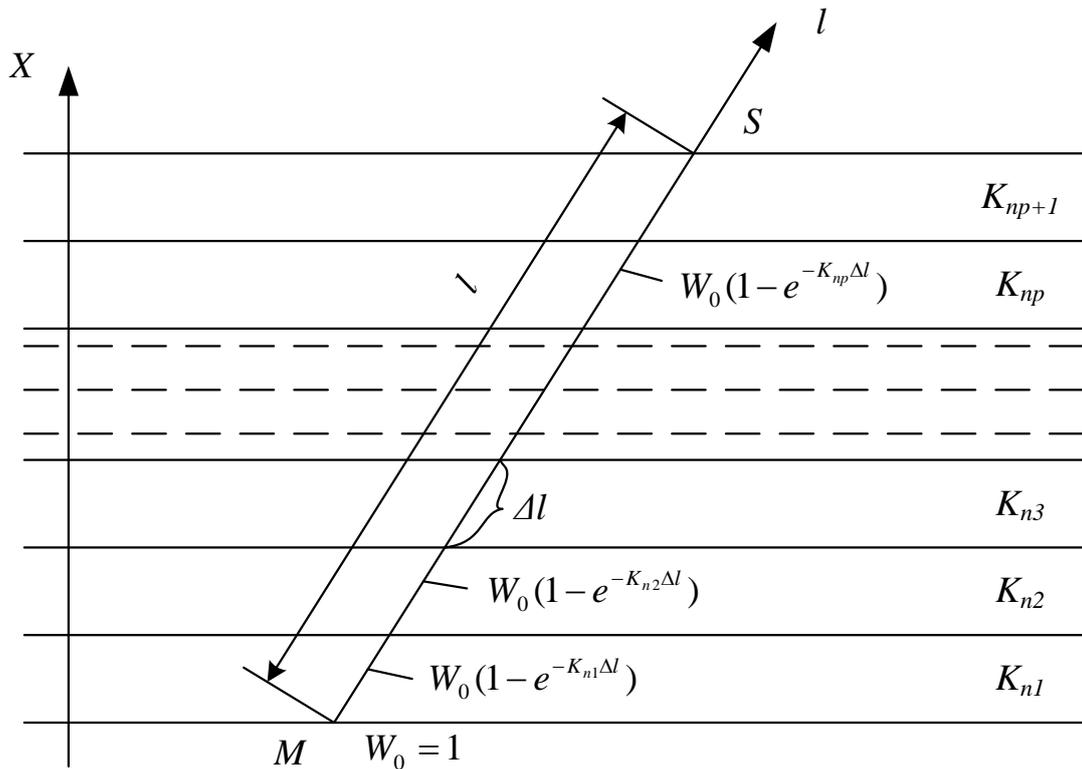


Рис. 5.8. Моделирование поглощения пучка фотонов в неоднородной среде.

Для получения искомой величины, в частности, доли энергии, поглощенной объемом в данной спектральной области, найденные вероятности усредняются по всем возможным последовательностям направлений, определенным методом случайных испытаний. В практических алгоритмах интеграл в показателе экспоненты выражения (5.22) заменяется суммой, благодаря чему можно записать следующее равенство:

$$1 - \exp\left(-\sum_{p=1}^{\delta} K_{np}^{\lambda}(\Delta\lambda, x(l))\Delta\lambda\right) = \sum_{p=1}^{\delta} W_{p-1} (1 - \exp(-K_{np}^{\lambda} \Delta\lambda)), \quad (5.23)$$

где  $\Delta l$  – величина шага разбиения по направлению следования луча, м;  
 $\delta$  – число шагов для данного направления;  
 $W_{p-1}$  – «статистический вес» луча на шаге  $p-1$ .

Как видно из равенства (5.23) и из сравнения рис. 5.7 и 5.8, расчетная схема поглощения в объеме одинакова как при областном разбиении, так и при узловом. По-разному осуществляется лишь выбор значения  $K_{np}^{\lambda}$  для текущего шага. В узловом методе на очередном шаге выбирается значение коэффициента поглощения  $K_{nj}^{\lambda}$  близлежащего узла (см. рис. 5.7), номер которого  $j$  определяется простой процедурой, тогда как для областного разбиения (см. рис. 5.8) необходима определенная логическая схема, составленная для жестко закрепленной геометрии поглощающих объемов (областей) и граничных поверхностей. Введение в объем узлов, не связанных

с пересечением каких-либо поверхностей, позволяет оперативно вмешиваться в распределение оптических характеристик в объеме модели в тех случаях, когда изменение геометрии рабочего пространства печи во многом определяет форму и положение факела.

5. Описанный алгоритм реализует диффузную аппроксимацию поверхностного излучения (отражения), но при необходимости может быть легко перестроен для учета спектрально-направленных свойств, для чего необходимо продолжить историю фотона с учетом зависимости отражательной способности поверхности от направления падающего излучения в данном интервале длин волн.

6. Проведение достаточного числа статистических испытаний  $N_{\text{исп}}$  с каждой поверхностного узла позволяет определить матрицу обобщенных угловых коэффициентов, связывающих соответствующие узловые поверхности с учетом взаимодействия излучения со средой. При диффузном приближении такой матрицы вполне достаточно, чтобы алгебраическим путем перейти к разрешающим угловым коэффициентам радиационного обмена.

В узловом методе спектральные разрешающие локальные угловые коэффициенты излучения  $f_{Ni}^{\lambda}$ , представляющие собой долю энергии, излученной поверхностным узлом  $N$  и поглощенной окрестностью поверхностного или объемного узла  $i$ , находятся методом итераций при решении системы следующих линейных уравнений:

$$f_{Ni}^{\lambda,\beta} = \varepsilon_i^{\lambda} \psi_{Ni}^{\lambda} + \sum_{j=1}^n R_j^{\lambda} \psi_{Nj}^{\lambda} f_{ji}^{\lambda,\beta-1}, \quad (5.24)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

где  $i$  – поверхностный узел;

$$f_{Ni}^{\lambda,\beta} = \psi_{Ni}^{\lambda} + \sum_{j=1}^n R_j^{\lambda} \psi_{Nj}^{\lambda} f_{ji}^{\lambda,\beta-1}, \quad (5.25)$$

$$(i = n, n+1, \dots, n+m),$$

где  $i$  – объемный узел.

Здесь  $N = 1, 2, \dots, n$ ;  $R_j^{\lambda}$  – спектральная отражательная способность;  $\psi_{Ni}^{\lambda}$  и  $\psi_{Nj}^{\lambda}$  – спектральные обобщенные локальные угловые коэффициенты излучения;  $n$  и  $m$  – число соответственно поверхностных и объемных зон;  $\beta$  – порядковый номер итерации.

Итерационный процесс начинается с подставления в систему (5.24) – (5.25) обобщенных угловых коэффициентов в качестве нулевого приближения и заканчивается в тот момент, когда максимальное отклонение

$f_{Ni}^{\lambda, \beta+1}$  от  $f_{Ni}^{\lambda, \beta}$  не будет превышать заданного малого числа  $\varepsilon$ , определяющего необходимую точность вычислений.

7. В описываемый алгоритм включена возможность учета селективных свойств, участвующих в теплообмене сред (объемов и поверхностей) введением в расчет произвольного количества серых спектральных интервалов спектра излучения (селективно-серая аппроксимация).

Результирующий поток излучения в случае селективно-серой аппроксимации для поверхностного узла  $N$  (см. рис. 5.6) рассчитывается по формуле

$$q_N = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq N}}^{n+m-1} b_{iN}^{\Sigma} T_i^4 - b_N^{\Sigma} T_N^4, \quad (5.26)$$

где  $b_{iN}^{\Sigma}$  и  $b_N^{\Sigma}$  – селективные локальные удельные коэффициенты радиационного обмена, Вт/(м<sup>2</sup> · К<sup>4</sup>) равны:

$$b_{iN}^{\Sigma} = \sigma_0 \sum_{\beta=1}^{\infty} f_{Ni}^{\lambda_K} \varepsilon_N^{\lambda_K} \alpha_i^{\lambda_K}, \quad (5.27)$$

$$b_N^{\Sigma} = \sigma_0 \sum_{\beta=1}^{\infty} (1 - f_{NN}^{\lambda_K}) \varepsilon_N^{\lambda_K} \alpha_N^{\lambda_K} \quad (5.28)$$

Здесь  $b_{iN}^{\lambda_K}$  и  $b_{NN}^{\lambda_K}$  – спектральные разрешающие локальные коэффициенты излучения соответственно от узла  $N$  на узловую поверхность  $i$  и от узла  $N$  на узел  $N$  для  $k$ -й полосы разбиения на полосы спектра излучения;  $\varepsilon_N^{\lambda_K}$  – осреднённая степень черноты поверхности, в пределах выделенной  $k$ -й полосы спектра излучения шириной  $\Delta\lambda_K$ ;

$$\alpha_N^{\lambda_K} = \frac{\int E_{0\lambda} d\lambda}{\sigma_0 T_N^4} - \text{доля излучения абсолютно черного тела в пределах}$$

полосы спектра  $\Delta\lambda_K$  при температуре  $T_N$  узла  $N$ .

Следует отметить, что разбиение спектра на ряд «серых» интервалов (в пределах которых степени черноты и коэффициентов поглощения считаются постоянными) позволяет избежать в алгоритме процедуры Монте-Карло разыгрывания длины волны, что значительно упрощает реализацию метода Монте-Карло и делает возможным проведение расчетов в многоузловых системах со сложной геометрией.

## 5.4 Метод конечных разностей – мелкой сетки

Основа метода конечных разностей – метод мелкой сетки или узловой метод на примере решения уравнений теплопроводности (Фурье). Используем уравнение распространения энергии в движущейся вещественной среде (4.58):

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = q_v + \operatorname{div}(\lambda, \operatorname{grad} T) - \rho \operatorname{div}(wi) + \operatorname{div} q_{\text{Л}}.$$

Принимаем:  $q_v = 0$ ,  $\rho \operatorname{div}(wi) = 0$ ,  $\operatorname{div} q_{\text{Л}} = 0$ .

Получаем, что  $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \operatorname{div}(\operatorname{grad} T)$  при  $\lambda = \text{const}$ ,

при этом получаем

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \operatorname{div}(\operatorname{grad} T) = \lambda \nabla^2 T \quad \text{или} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T,$$

где  $a$  – коэффициент температуропроводности  $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ .

При решении задач теплопроводности (уравнение Фурье) используется метод конечных разностей с разбиением на узлы сравнительно мелкой сеткой.

Конечно-разностное представление дифференциального уравнения Фурье (см. градиентный член в уравнении (4.46)) и граничных условий сводит решение задачи теплопроводности к расчету температур в конечном числе точек – узлов сетки (рис. 5.9). Чтобы дискретизированная задача была близка к исходной, необходимо сделать сетку достаточно частой. Поэтому число неизвестных (т.е. значений температур в узлах) оказывается большим, и решение задачи требует использования ЭВМ. Конечно-разностную аппроксимацию уравнения теплопроводности можно получить, записывая закон сохранения энергии для контрольного объема, содержащего внутренний узел  $(K, L)$  (заштрихован на рис. 5.9).

Скорость увеличения внутренней энергии в контрольном объеме определяется соотношением

$$h^2 \rho C \left[ \hat{T}(k, L) - T(k, L) \right] / \tau, \quad (5.29)$$

где  $h$  и  $\tau$  – пространственный и временной шаг, а "крышка" над обозначением температуры указывает, что имеется в виду значение для последующего момента времени. Внутреннее тепловыделение в контрольном объеме определяется как  $h^2 q_v$ .

Как показано на рис. 5.9, положительным считается направление теплового потока внутрь контрольного объема. Например, через правую грань посредством теплопроводности подводится количество энергии:

$$\left( \frac{\lambda}{h} \right) [T(k, L+1) - T(k, L)] h. \quad (5.30)$$

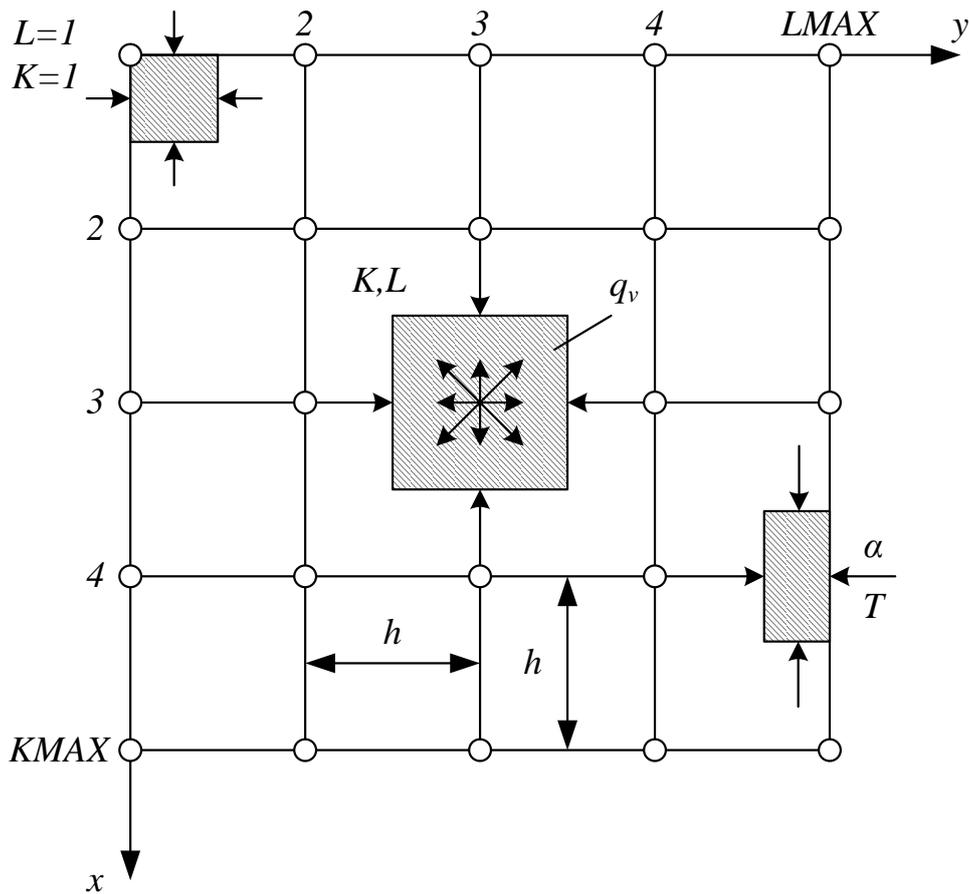


Рис. 5.9. К формулировке конечно-разностных уравнений:  $h$  – шаг сетки;  $K,L$ , – индексы значений температуры в узлах сетки;  $KMAX$  и  $LMAX$  – число узлов осей  $x'$  и  $y'$ ;  $q_v$  – мощность внутренних источников;  $\alpha$  и  $T_u$  – коэффициент теплоотдачи и температура среды.

Суммируя потоки энергии, и используя закон сохранения, получаем:

$$\begin{aligned}
 \hat{T}^{(1)}(K,L) - T(K,L) / F_0 = & [T(K,L-1) - 2T(K,L) + T(K,L+1)] + \\
 & + [T(K-1,L) - 2T(K,L) + T(K+1,L)] + q_v^{(3)} h^2 / \lambda
 \end{aligned}
 \quad (5.31)$$

где  $Fo = a\tau / h^2$  – сеточное число Фурье, безразмерный шаг по времени;

$a = \frac{\lambda}{\rho c}$  – коэффициент температуропроводности материала;

$c$  – удельная теплоёмкость материала;

$\rho$  – плотность материала.

Отдельные операторы в этом уравнении означают:

(1) – Скорость увеличения внутренней энергии, конечно-разностная аппроксимация частной производной по времени;

(2а) – подвод теплоты теплопроводностью вдоль оси  $x$ , аппроксимация второй производной по  $x$ ;

(2б) – подвод теплоты вдоль оси  $y$ , аппроксимация второй производной по  $y$ ;

(3)– внутреннее тепловыделение.

Баланс энергии для контрольного объема, содержащего узел на границе области (см. рис. 5.8), записывается в виде:

$$\left(\hat{T}_\Gamma - T_\Gamma\right) / F_0 = [2B_i T_{II} + 2T_{\text{вн}}(2 + 2B_i)T_\Gamma] + [T_L - 2T_\Gamma + T_\Pi] + q_v h^2 / \lambda, \quad (5.32)$$

где  $Bi = \alpha h / \lambda$  – сеточное число Био.

Операторы в квадратных скобках означают подвод теплоты по направлению нормали к поверхности вдоль границы.

Вместо индексов использованы мнемонические обозначения для граничного ( $\Gamma$ ), для левого ( $L$ ), для правого ( $\Pi$ ) узлов.

Предполагается, что наблюдатель находится внутри области.

Тепловой поток на поверхности рассчитывается по формуле Ньютона-Рихмана, т.е. использованы граничные условия 3-го рода.

Соотношения (5.31) и (5.32) являются приближенными и допускают некоторый произвол при записи правой части. Если все значения температур справа отнесены к исходному моменту времени, то расчетную схему называют явной: искомое значение температуры  $\hat{T}$  в следующий момент времени явно выражается через известные температуры  $T$  в исходный момент времени. Алгоритм расчета оказывается очень простым: начальное условие определяет распределение температур в узлах сетки на старте расчета; затем по (5.31) и (5.32) вычисляют температуру в узлах для следующего момента; процесс повторяется, пока не будет пройден заданный промежуток времени (либо до установления стационарного состояния).

Однако явная схема имеет существенный недостаток: если шаг по времени превышает некоторое критическое значение, в расчете возникают колебания температуры с быстро нарастающей амплитудой. Такое решение не имеет ничего общего с реальным процессом теплопроводности.

При этом шаг по времени  $\Delta t$  связан с шагом по координатам  $\Delta x$  и  $\Delta y$ . Например, для оси  $\Delta x$  неявная схема получается, если в правых частях уравнений для внутренних и граничных узлов все температуры отнести к последующему моменту времени, т.е. снабдить значками "крышка".

Такая схема абсолютно устойчива, т.е. расчет можно вести с любым шагом по времени, допускаемым по соображениям точности. Однако теперь, чтобы найти неизвестную температуру  $\hat{T}(K, L)$ , необходимо решить систему уравнений. Действительно, соотношение (5.31), записанное для каждого

внутреннего узла, дает уравнение, содержащее неизвестные температуры в центральном  $(K,L)$  узле и четырех окружающих узлах. Объем вычислений быстро увеличивается с ростом числа узлов и оказывается недопустимо большим даже для современных ЭВМ.

Метод переменных направлений позволяет сократить объем вычислений по неявной схеме, сохраняя свойство абсолютной устойчивости. Ниже приводится реализация этого метода для областей прямоугольной формы без внутренних источников теплоты.

При построении продольно-поперечной схемы шаг по времени осуществляется, как два полушага: на первом оператор теплопроводности вдоль оси  $x$  записывается в неявной форме, а вдоль оси  $y$  – в явной; на втором полушаге явным становится первый оператор и неявным – второй. Расчетная схема определяется следующими соотношениями:

$$\frac{\hat{T}(K,L) - T(K,L)}{0,5F_0} = [\hat{T}(K,L-1) - 2\hat{T}(K,L) + \hat{T}(K,L+1)] + [T(K-1,L) - 2T(K,L) + T(K+1,L)]; \quad (5.33)$$

$$\frac{T(K,L) - T(K,L)}{5F_0} = [T(K,L-1) - 2T(K,L) + T(K,L+1)] + [\hat{T}(K-1,L) - 2\hat{T}(K,L) + \hat{T}(K+1,L)]. \quad (5.34)$$

Величины  $\hat{T}$ , вычисленные на первом полушаге, используются затем как исходные значения (т.е.  $T$ ) для расчета на втором полушаге.

Оба записанных соотношения по-прежнему неявные, но обладают теперь важным свойством, упрощающим их решение: каждое уравнение содержит неизвестные только для трех соседних точек. Поэтому получающиеся системы линейных уравнений являются трехдиагональными и их решение может быть получено методом прогонки – экономичным вариантом метода исключения Гаусса; при этом система (5.33) решается прогонкой вдоль строк (по оси  $x$ ), система (5.34) — прогонкой вдоль столбцов (оси  $y$ ) – см. рис. 5.9.

Полушаг при прогонке в направлении нормали к границе делается согласно (5.33) по формуле

$$\frac{\hat{T}_r - T_r}{0,5F_0} = [2B_i(T_u - \hat{T}_r) + 2(\hat{T}_{en} - T_r)] + [T_n - 2T_r + T_n]. \quad (5.35)$$

Схема переменных направлений является, по-видимому, лучшей для двумерных задач теплопроводности. Ее применение обеспечивает выполнение весьма важного для практических задач требования: получения разумных результатов при расчете на грубых сетках и с большими шагами по времени.

Рассмотрим использования метода конечных разностей на примере одномерной задачи.

При этом уравнение Фурье приобретает вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (5.36)$$

Заменяем в соответствии с методом конечных разностей:

$$\partial T \rightarrow \Delta T;$$

$\partial t \rightarrow \Delta t$  – интервал или масштаб времени (задаваемая величина);

$\partial x \rightarrow \Delta x$  – масштаб по координате.

Преобразуем дифференциальное уравнение Фурье в алгебраическое уравнение, используя метод конечных разностей.

Явный метод.

Используем обозначения:  $i$  – интервал по координате;  $k$  – интервал по времени.

Тогда уравнение (5.36) преобразуется к виду:

$$\frac{T_{i,k+1} - T_{i,k}}{\Delta t} = a \frac{T_{i+1,k} + T_{i-1,k} - 2T_{i,k}}{\Delta x^2}. \quad (5.37)$$

С использованием числа подобия  $Fo$  получаем критерий подобия:

$$T_{i,k+1} - T_{i,k} = \Delta Fo (T_{i+1,k} + T_{i-1,k} - 2T_{i,k}), \quad \text{где } Fo = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \text{ – число подобия}$$

Фурье.

Ограничения метода:

Данный явный метод, как отмечалось, имеет ограничение на устойчивость.

При  $Fo \leq 0,5$  – устойчивое решение.

При  $Fo > 0,5$  – не устойчивое решение.

В соответствии с этим получаем соотношение между интервалом по времени и по координате на грани устойчивости:

$$1) \quad Fo = 0,5 \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}, \quad \text{откуда } \Delta x = \sqrt{2a\Delta t}, \quad \text{т.е. чем меньше } \Delta x, \text{ тем}$$

больше,  $Fo$  – и требуется выбрать меньшее значение  $\Delta t$ , чтобы не выйти из состояния устойчивости.

2) На грани устойчивости  $Fo = 0,5$  и из уравнения (5.37) следует:

$$T_{i,k+1} = \frac{T_{i+1,k} + T_{i-1,k}}{2}. \quad (5.38)$$

Это соотношение позволяет применять наглядный графический метод при нагреве тела (рис. 5.10)

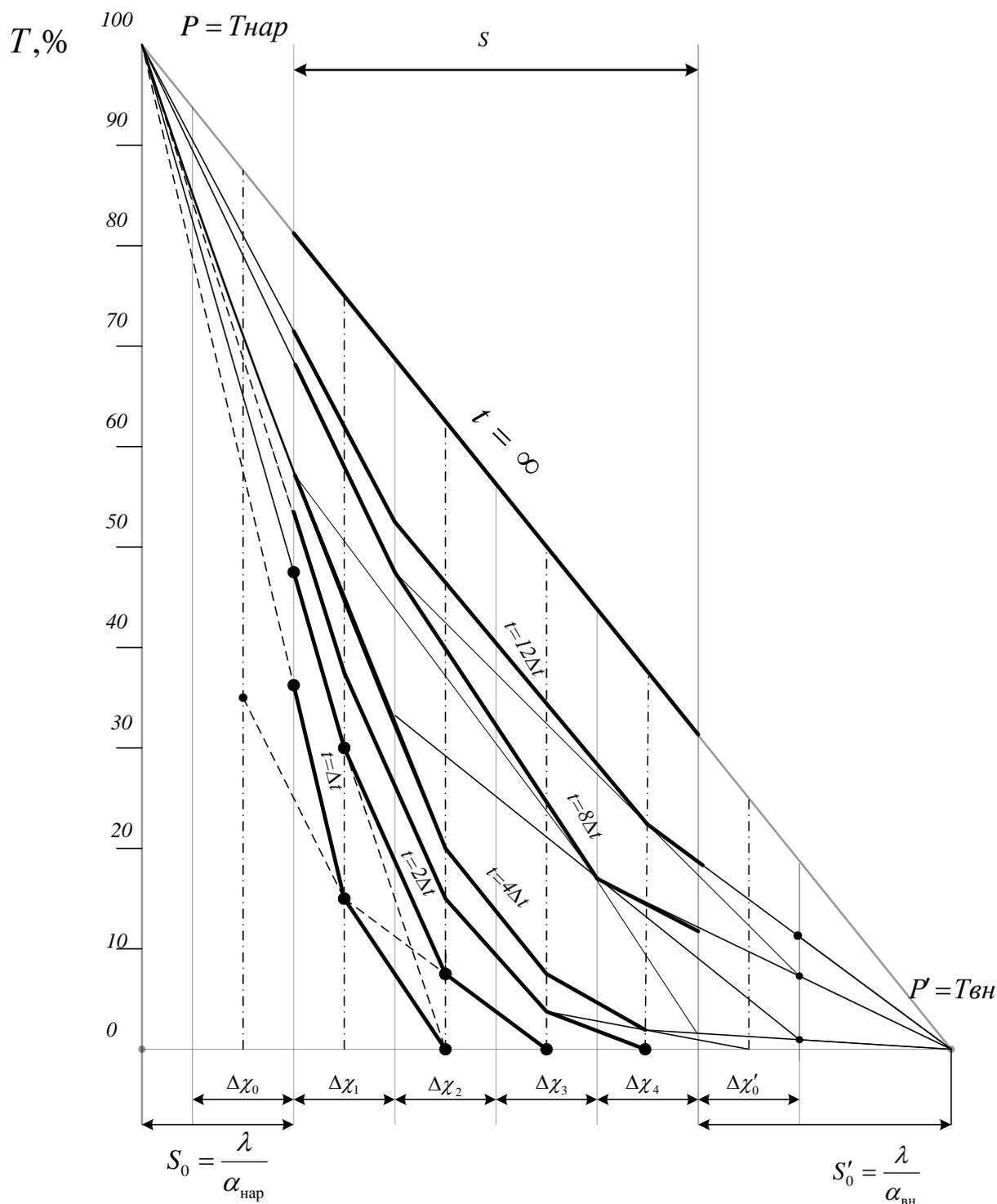


Рис. 5.10. Пример схемы построения полей температур при нагреве пластины толщиной  $S$  методом конечных разностей при  $Fo = 0,5$ :  $T_{нар}$ ,  $\alpha_{нар}$  и  $T_{вн}$ ,  $\alpha_{вн}$  – температуры и коэффициенты теплопередачи на наружной и внутренней поверхности пластины;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала пластины;  $\Delta x_0$  и  $\Delta x'_0$  – вспомогательные слои;  $P$  и  $P'$  – полюса построения;  $\Delta t = 0,5 \frac{\Delta x^2}{a}$ .

### Неявный метод.

Неявный метод, как отмечалось, обеспечивает абсолютную устойчивость решения. Для данной задачи получаем:

$$\frac{T_{i,k+1} - T_{i,k}}{\Delta t} = a \frac{T_{i+1,k+1} + T_{i-1,k+1} - 2T_{i,k+1}}{\Delta x^2}, \quad (5.39)$$

и

$$T_{i,k+1} = T_{i,k} + \Delta F_0(T_{i+1,k+1} + T_{i-1,k+1} - 2T_{i,k+1})$$

В этом случае система уравнений является абсолютно устойчивой и не требуется соблюдать никакой связи между величинами  $\Delta x$  и  $\Delta t$ .

## 5.5 Методы численного решения систем нелинейных уравнений на примере решения системы зональных уравнений

В системе зональных уравнений теплового баланса и теплопередачи величины  $m + n$  – число зональных уравнений;  $m$  и  $n$  – число объектных и поверхностных зон, соответственно.

При решении различных задач величина  $m + n$  может находиться в пределах  $200 \div 300 - 30000$  и более.

Для решения этой системы уравнений относительно температуры зоны  $j$  применяется метод Ньютона-Зейделя.

Температура зоны на следующем шаге итерации определяется выражениями:

$$T_{j1} = T_{j0} - \frac{\Delta f_0(T)}{2^m} \left[ \frac{\partial f(T)}{\partial T_j} \right]^{-1}; \quad (5.40)$$

$$T_{j2} = T_{j1} - \frac{\Delta f_1(T)}{2^m} \left[ \frac{\partial f(T)}{\partial T_j} \right]^{-1}, \quad (5.41)$$

где  $\Delta f(T)$  – невязка соответствующего приближения.

$m$  – коэффициент демпфирования,  $m \approx 2 \div 3$ .

Пример, если  $T_{j0} = 1000\text{K}$ ,  $\Delta f(T) = 120\text{K}$ ,  $\frac{\partial f(T)}{\partial T} = -1$ , то

$$T_{j1} = 1000 - \frac{120}{2^{m=2}} (-1) = 1030\text{K}.$$

Для улучшения сходимости решения используется метод Зейделя или метод покоординатного спуска. При этом итерации и определение температур в зонах проводится последовательно от одного предыдущего уравнения к последующему.

## Глава 6. Постановка задачи оценивания состояния технологического процесса

### 6.1 Постановка задачи оценивания

Необходимость постановки задачи оценивания определяется следующими причинами.

Причины класса А.

В реальных технологических процессах, как правило, не удастся контролировать все координаты вектора состояния  $y(t)$ . (по схеме У. Рея см. рис.2.1) Таким образом, размерность вектора измеряемых выходов  $y'(t)$ , отражающих величину  $y(t)$ , обычно меньше размерности вектора состояния. Это означает, что часто требуемая для автоматического управления выходная величина процесса по различным причинам не может быть измерена непосредственно.

Причины класса В.

Значительная неопределенность вносится погрешностями измерений (в том числе и методическими), технологическими шумами и случайными (неконтролируемыми) возмущениями.

Причины класса С.

Используемые модели не вполне адекватны объектам управления, как по геометрическим, так и по физическим параметрам процессов.

Причины класса D.

Существенная неопределенность в задачу определения  $y(t)$  вносится на начальном этапе моделирования, вследствие отсутствия информации об исходном начальном состоянии процесса  $y(0)$  в момент старта математической модели в реальном масштабе времени.

Таким образом, необходимость проведения процедуры оценивания появляется в случаях, характеризуемых следующим образом:

- 1) недоступность места установки датчиков
- 2) наличие метрологических помех
- 3) наличие стохастических (вероятностных) неизмеряемых помех.

Цель методов оценивания заключается в том, что в темпе с процессом в условиях случайных погрешностей, шумов и возмущений определять даже те координаты вектора состояния  $y(t)$ , которые непосредственно не измеряются.

Иными словами, ставится задача повышения точности предсказания состояния процесса по известной модели процесса, путем подавления (фильтрации) различного рода помех и неопределенностей.

Большинство процессов, в которых применяются АСУ ТП, являются непрерывными и отличаются сложностью, распределённостью и сопряженностью протекающих в них физических явлений. В связи с этим целесообразно рассмотреть последовательные (или рекуррентные) методы

оценивания, хорошо зарекомендовавшие себя при управлении инерционными, нестационарными процессами (процессами с «памятью»).

Рекуррентные методы оценивания позволяют получать новые оценки состояний в темпе с процессом путем пересчета уже имеющихся оценок при поступлении очередной порции измерительной информации, а затем использовать обновленные оценки  $\hat{y}(t)$  в алгоритмах управления.

Таким образом, оценивание – это задача восстановления состояний процесса по информации на его входах (управлениях и контролируемых возмущениях) и выходах (наблюдениях) с использованием модели процесса и некоторой рекуррентной процедуры (фильтра).

Рассмотрим постановку задачи оценивания в виде блок-схемы (рис. 6.1).

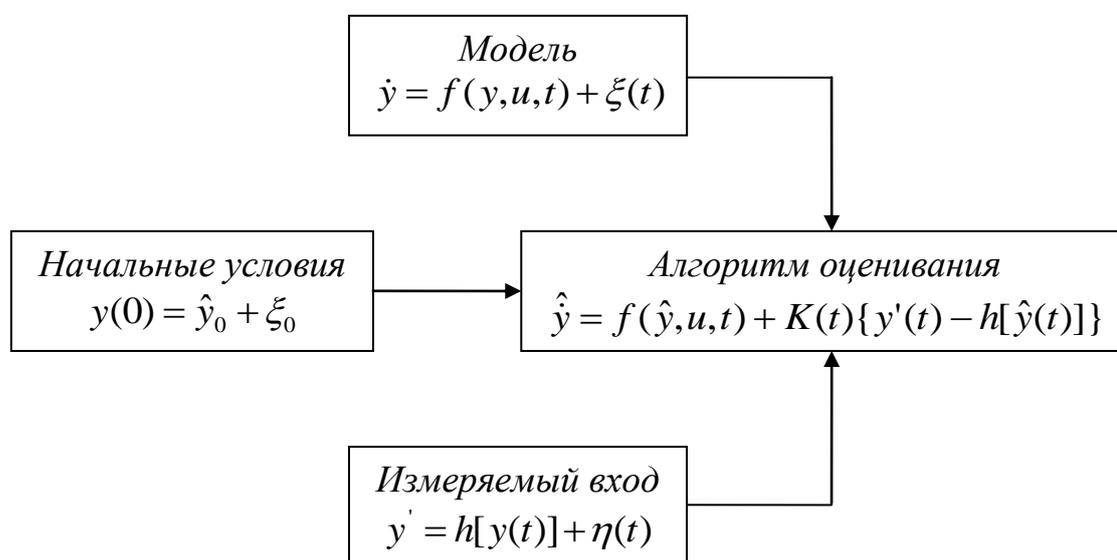


Рис. 6.1. Блок-схема задачи оценивания.

При этом постановка задачи сводится к следующему (рис. 6.1):

Известными считаются следующие положения:

- 1) Модель задана системой дифференциальных уравнений.
- 2) Статистические свойства ошибок моделирования ( $\xi(t)$ ,  $\xi_0$ ) заданы ковариационными матрицами  $Q(t)$  и  $P(0)$  соответственно.
- 3) Статистические свойства ошибок измерений  $\eta(t)$  заданы ковариационной матрицей  $R(t)$ .
- 4) Определяются входы  $u(t)$ ,  $d(t)$  – управляющие и возмущающие воздействия и выходы  $y'(t)$  – параметры состояния объекта управления.

В задаче требуется оптимально оценить: текущее состояние процесса  $\hat{y}(t)$

Используем следующие обозначения:

$$Q(t) = M \left\{ \xi(t) \times \xi^T(t) \right\}$$

$$P(0) = M \left\{ [y(0) - \hat{y}_0] \times [y(0) - y_0]^T \right\}$$

$$R(t) = M \left\{ \eta(t) \times \eta^T(t) \right\}$$

Таким образом, оптимальная текущая оценка состояния  $\hat{y}(t)$  получается как решение дифференциального уравнения (рис. 6.1), описывающего эволюцию (динамику) условного среднего между предсказаниями  $x(t)$  по модели и текущими измерениями.

$$\dot{\hat{y}} = f(\hat{y}, u, t) + K(t) \{ y'(t) - h[\hat{y}(t)] \}. \quad (6.1)$$

Правая часть уравнения (6.1) содержит два слагаемых: первое описывает свободное движение процесса моделирования, а второе – вынужденное, причем в качестве своеобразной вынуждающей силы выступает отклонение фактически наблюдаемого выхода  $y'(t)$  от его прогноза по модели наблюдений:  $\hat{y}(t) = h[\hat{y}(t)]$ .

Величина коррекции оценки, обусловленная этой вынуждающей силой, регулируется «матричным» коэффициентом усиления фильтра  $K(t)$ , который зависит от свойств (уровня) случайных возмущений и помех. Можно констатировать следующие положения:

- 1) Величина  $K(t)$  возрастает, если начинают преобладать возмущения (т.е. ошибки моделирования:  $\xi_0 \uparrow$  или  $\xi(t) \uparrow$ );
- 2) Величина  $K(t)$  убывает, если начинают преобладать помехи измерений:  $\eta(t) \uparrow$ .

Рассмотренный характер динамики  $K(t)$  приводит к тому, что оценка в большей мере определяется той информацией, которая в данный момент более надежна.

В этом алгоритме ставится задача увеличения точности и полноты предсказания  $\hat{y}(t)$  по известной нам модели путём подавления (фильтрации) различного рода помех и возмущений.

Ещё раз заметим, что мы рассматриваем сложные непрерывные технологические процессы с распределёнными параметрами, при этом целесообразно рассматривать непрерывные (рекуррентные) методы фильтрации, которые позволяют получать новые оценки состояния путём пересчета уже имеющихся оценок при поступлении новой информации о входах ( $\bar{u}$  и  $\bar{d}$ ) и выходах ( $y'$ ) процесса.

Таким образом, ещё раз определим, что оценивание – это задача восстановления состояний процесса по информации на его входах и выходах с использованием модели процесса и некоторой рекуррентной процедуры (фильтра).

## 6.2 Фильтр Калмана-Бьюси и его применение

### 6.2.1 Понятие о фильтре Калмана-Бьюси (ФКБ)

В соответствии с рассмотренным выше алгоритмом, узловым вопросом работоспособности (сходимости) алгоритма оценивания является динамическая настройка «матричного» коэффициента усиления фильтра  $K(t)$ .

Алгоритмы настройки строятся на основании теории линейной фильтрации и стохастического управления (рис. 6.2). Определяющим параметром при этом является матрица ковариации ошибок оценивания  $P(t)$ , определение и использование которой в алгоритмах настройки приводит к динамической коррекции коэффициента усиления фильтра  $K(t)$ . В соответствии с соотношением:

$$P(t) = M \{ [y(t) - \hat{y}(t)] \times [y(t) - \hat{y}(t)]^T \}, \quad (6.2)$$

Матрица ковариации ошибок оценивания  $P(t)$  оценивается путем решения, так называемого, матричного дифференциального уравнения Риккати.

Классическим выражение ФКБ, является уравнение (см. также уравнение)

$$\hat{y}'(t) = f(\hat{y}, u, t) + K(t) \{ y'(t) - \hat{y}'(t) \}, \quad (6.3)$$

где:  $\hat{y}(t)$  – оптимальная текущая оценка вектора состояния процесса;  
 $\hat{y}_p(t) = f(\hat{y}, u, t)$  – расчетная текущая оценка вектора состояния процесса по модели;

$$\hat{y}'(t) = h[\hat{y}(t)] \text{ – модель наблюдений.}$$

На рисунке 6.2 показан рекуррентный характер процедуры использования фильтра Калмана-Бьюси, а в разделе 6.2.2 приведен развёрнутый алгоритм функционирования фильтра Калмана-Бьюси и блок-схема расширенного фильтра Калмана-Бьюси.

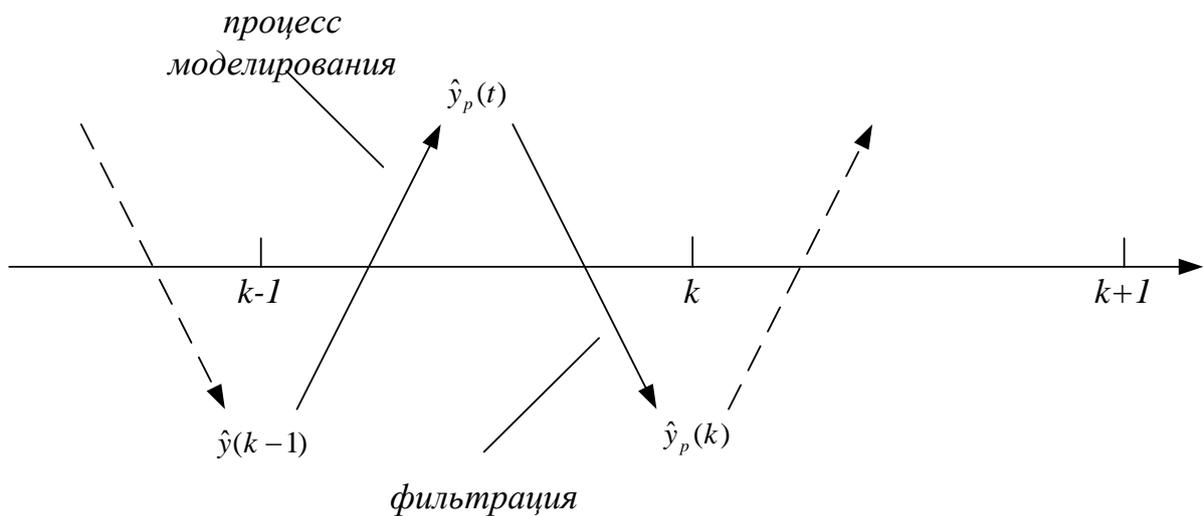


Рис. 6.2. Схема моделирования при использовании фильтра Калмана-Бьюси.

### 6.2.2 Алгоритм и блок-схема расширенного фильтра Калмана-Бьюси (для процессов с распределёнными параметрами)

Характеристика	Уравнение
Модель процесса	$\dot{y} = f(y, u, t)$
Измерения	$y'(k) = h[y(k)] + \eta(k)$
Начальные условия	$y(0) = \hat{y}(0) + \xi_0$ $cov(y(0) - \hat{y}(0)) = P(0)$
Оценка между измерениями	$\hat{y}_p(k) = \hat{y}(k-1) + f[\hat{y}(k-1), u(k)]\Delta t$
Матричное дифференциальное уравнение Риккати	$\dot{P}_p(k) = F(k)P(k-1) + P(k-1)F^T(k) + Q(k)$
Матрица Якоби	$F(k) = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right _{y=\hat{y}(k-1)}, F_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j}$
Переходная матрица	$\Phi(k) = I + F(k)\Delta t$
Решение уравнения Риккати	$P_p(k) = \Phi(k)P(k-1)\Phi^T(k) + Q(k)$ $\hat{y}(k) = \hat{y}_p(k) + K(k)\{y'(k) - h[\hat{y}_p(k)]\},$
Оценка при измерении (оптимальная)	здесь $K(k) = P_p(k)H^T(k)[H(k)P_p(k)H^T(k) + R(k)]^{-1}$ $P(k) = P_p(k) - K(k)H(k)P_p(k) = [I - K(k)H(k)]P_p(k)$
Матрица измерений	$H(k) = \left. \frac{dh}{dy} \right _{y=\hat{y}_p(k)}, H_{ij} = \frac{dh_i}{dy_j}$

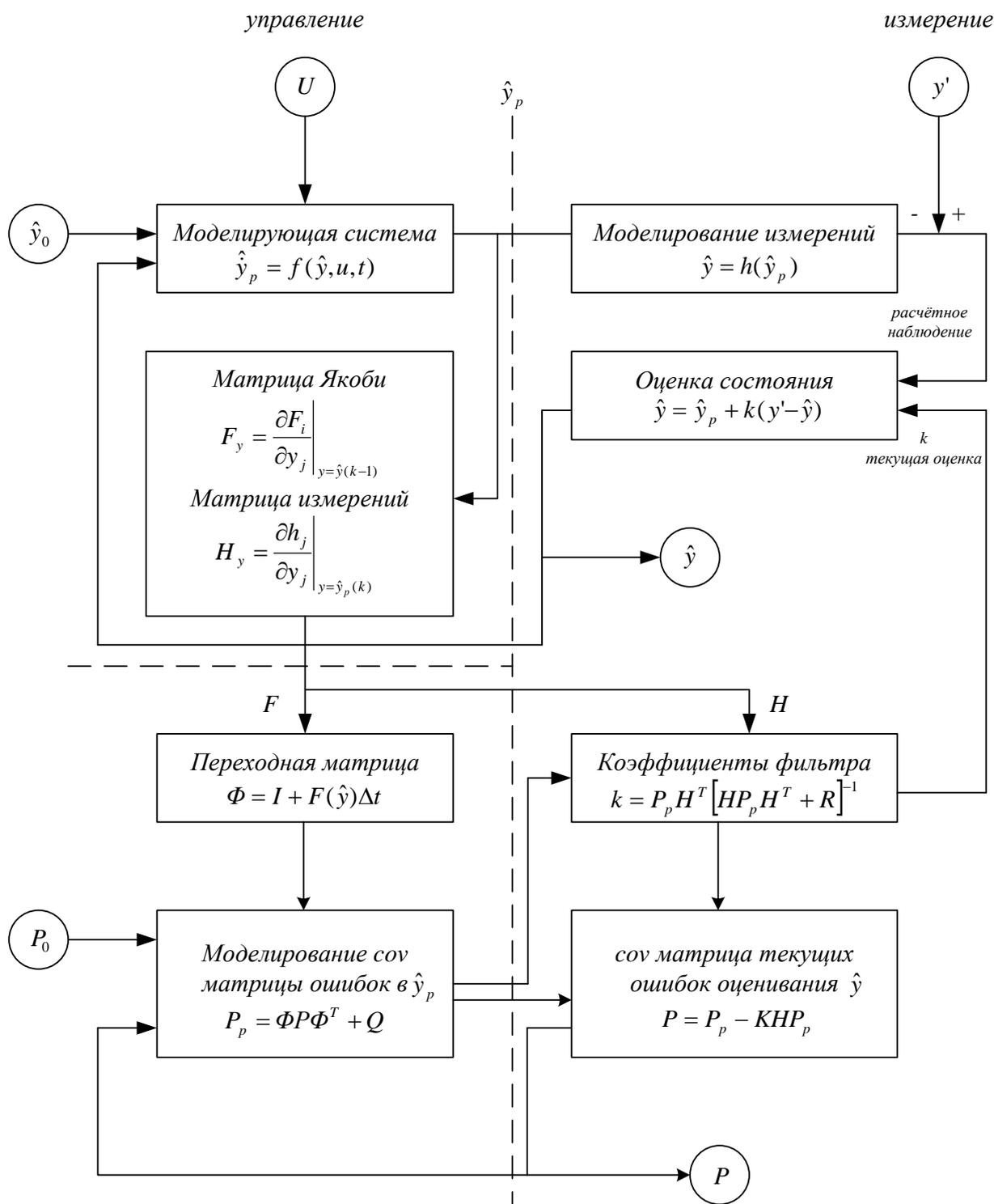


Рис. 6.3. Блок-схема расширенного фильтра Калмана-Бьюси.

### 6.2.3 Пример оценивания состояния объекта с распределёнными параметрами с использованием фильтра Калмана-Бьюси

При описании сложных моделей управления, как показывает опыт, использование моделей с сосредоточенными параметрами оказывается недостаточно. Это связано с тем, что в каждой точке координат

технологического процесса возникают свои переходные процессы, каждый из которых зависит не только от времени, но и от пространственных координат точки (при этом переходные процессы сопряжены).

Рассмотрим в качестве примера задачу оценивания температурного состояния термически массивного тела цилиндрической формы, находящегося в поле мощного источника теплового излучения (рис.6.4). Динамика процесса распространения тепловой волны внутри тела описывается с помощью дифференциальных уравнений в частных производных (согласно закону Фурье).

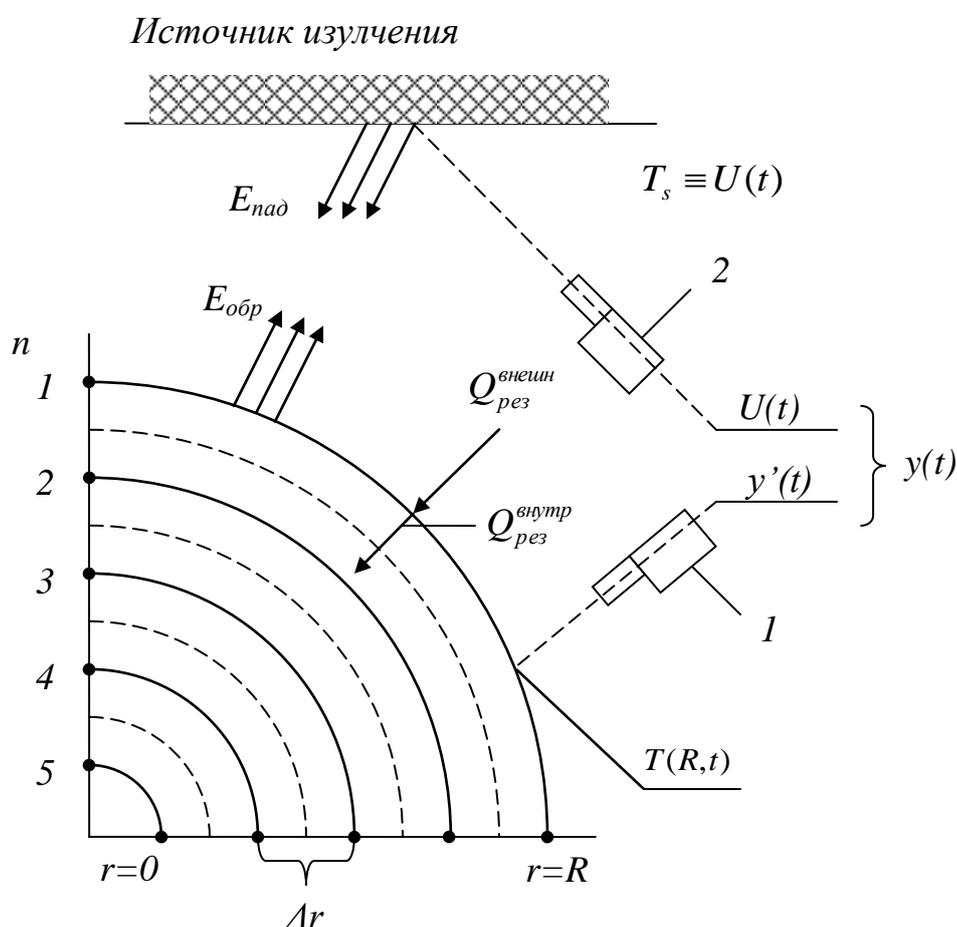


Рис. 6.4. Схема объекта с распределёнными параметрами и измерение при оценивании состояния. Где:  $n$  – число выделенных слоёв (колец) цилиндра;  $R$  – радиус цилиндра;  $E_{над}$  и  $E_{обр}$  – падающий и обратный тепловой поток соответственно;  $Q_{рез}^{внешн}$  и  $Q_{рез}^{внутр}$  – внешний и внутренний результирующий тепловой поток соответственно; 1 и 2 – пирометры излучения;  $T(R,t)$  и  $T_s$  – температура поверхности металла и источника излучения, соответственно.

**Модель управляющего воздействия (внешняя задача):**

Используется закон излучения Стефана-Больцмана.

$$E_{над} \cong \sigma_0 T_s^4(t); \quad (6.4)$$

$$E_{обр} = \sigma_0 T^4(R,t); \quad (6.5)$$

$$Q_{рез}^{внеш} = E_{над} - E_{обр} \quad (6.6)$$

Параметры модели:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho c} - \text{коэффициент температуропроводности; } \varepsilon_{эф} - \text{эффективная}$$

степень черноты, показывающая степень взаимного облучения тела и источника (учитывает многократные отражения);  $\lambda$ ,  $c$  и  $\rho$  – коэффициент теплопроводности, удельная теплоёмкость и плотность материала рассматриваемого тела;  $\sigma_0$  – постоянная Стефана-Больцмана,  $5,669 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>К<sup>4</sup>).

Рассмотрим элементы вектора состояния:  $y_i(t) = T(r,t)$ .

Вектор состояния процесса (поле температуры) представим в виде матрицы:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{— температура поверхности} \\ \\ \\ \\ \text{— температура центра} \end{array}$$

Модель процесса представлена (внутренней задачей нестационарной теплопроводности – законом Фурье):

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \right) \quad \text{для } 0 < r < R; \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 2\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \quad \text{для } r = 0.$$

Граничные условия (для  $r=R$ ):

$$Q_{рез}^{внутр} = Q_{рез}^{внеш}$$

или

(6.8)

$$-\lambda F \frac{dy}{dr} = \varepsilon_{эф} F \sigma_0 [T_s^4 - T^4(R, t)],$$

где  $F$  – площадь цилиндрической поверхности облучения.

Представим конечно-разностную аппроксимацию (по явной схеме) рассмотренных уравнений (6.7), (6.8).

Дискретная модель:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 = \frac{\Delta y_1}{\Delta t} = F \left\{ \varepsilon_{эф} \sigma_0 [T_s^4 - (y_1 + 273)^4] + \lambda \frac{y_2 - y_1}{\Delta r} \right\}; \\ \dot{y}_m = \frac{\Delta y_m}{\Delta t} = \alpha \left( \frac{y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{y_{m-1} - y_{m+1}}{2\Delta r^2} \right) \text{ для } m = 2, 3, 4; \\ \dot{y}_5 = \frac{\Delta y_5}{\Delta t} = 4\alpha \frac{y_4 - y_5}{\Delta r^2}. \end{array} \right. \quad (6.9)$$

Таким образом, получена численная (дискретная) модель динамики рассматриваемой системы (в векторной форме):

$$\dot{y} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = f(y, u, t), \quad (6.10)$$

где  $u = T_s$  – в данном случае представляет управление;

$$\Delta y = \hat{y}_p(k) - \hat{y}(k-1).$$

Процедуру расчетного предсказания нового состояния объекта на шаге  $k$  можно записать в векторном виде:

$$\hat{y}_p(k) = \hat{y}(k-1) + f[\hat{y}(k-1), u(k)] \times \Delta t \quad (6.11)$$

Уравнение (6.11), так называемое, «свободное» движение системы (процесса моделирования).

С использованием вынуждающей силы (отклонения  $\hat{y}_p(k)$  от наблюдений  $y'(k)$  – показание датчика температуры) можно записать выражение фильтра:

$$\hat{y}(k) = \hat{y}_p(k) + K(k)[y'(k) - \hat{y}(k)]. \quad (6.12)$$

В уравнении (6.12) модель наблюдений:

$$\hat{y}(k) = h[\hat{y}_p(k)] = H^T \hat{y}_p(k), \quad (6.13)$$

где  $H^T = (1,0,0,0,0)$ .

При этом становится ясно, что:

$$\begin{aligned} \hat{y}_1(k) &= \hat{y}_{1p}(k), \\ \hat{y}_m(k) &= 0, \quad m = 2, 3, 4, 5. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Поясним рассмотренный алгоритм числовым примером:

В момент времени  $k-1$  имеем оценку  $\hat{y}(k-1)$ .

Далее определяем:  $\hat{y}_p(k) = f[\hat{y}(k-1), T_s(k)]$ .

При этом:

$$\begin{array}{|l} 1031 \\ 1028 \\ 1073 \\ 1122 \\ 1141 \end{array} \leftarrow f \left( \begin{array}{|l} 1000 \\ 1025 \\ 1075 \\ 1130 \\ 1150 \end{array}, 1161 \right)$$

Тогда отфильтрованная оценка на момент измерений на шаге  $k$ :  $\hat{y}(k) = \hat{y}_p(k) + K(k)[y'(k) - \hat{y}(k)]$ :

$$\begin{array}{|l} 1027 \\ 1015 \\ 1067 \\ 1120 \\ 1140 \end{array} \leftarrow \begin{array}{|l} 1031 \\ 1028 \\ 1073 \\ 1122 \\ 1141 \end{array} + \begin{array}{|l} 0.65 \\ 2.36 \\ 0.92 \\ 0.25 \\ 0.08 \end{array} \times [1025 - 1031].$$

Графическая интерпретация этого решения представлена на рис. 6.5.

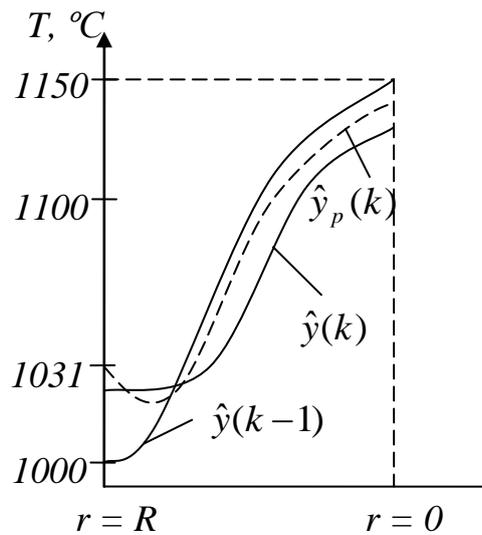


Рис. 6.5. Графическая интерпретация решения задачи оценивания температурного состояния нагреваемого тела.

В данном примере основная задача состоит в получении наилучших оценок температур внутри тела, которые недоступны измерениям. Узловым вопросом сходимости фильтра является динамическая (в темпе с процессом) настройка вектора корректирующих коэффициентов  $K(t)$ . При этом учитываем соотношения:

$$P = M\{(y - \hat{y})(y - \hat{y})^T\} \quad \text{— ковариационная матрица ошибки оценивания } \hat{y};$$

$$Q = M\{\xi(t) \times \xi^T(t)\} \quad \text{— ковариационная матрица возмущающих шумов (ошибок моделирования);}$$

$$R = M\{\eta(t) \times \eta^T(t)\} \quad \text{— ковариационная матрица измерительных шумов.}$$

Матрица Якоби используется для определения текущего значения переходной матрицы системы  $\Phi$ , которая уже непосредственно используется в алгоритме фильтра Калмана-Бьюси.

Якобиан для данного примера:

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 & 0 & 0 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 & 0 \\ 0 & F_{32} & F_{33} & F_{34} & 0 \\ 0 & 0 & F_{43} & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & F_{54} & F_{55} \end{pmatrix}$$

Таким образом, уравнение оптимального фильтра (Калмана) требует точного значения динамических характеристик системы и статистик случайных величин. В частности, должны быть известны переходная матрица системы и ковариации шумов.

Строгая детерминированность динамики, описываемая системой дифференциальных уравнений в частных производных, позволяет обеспечить сходимость рекуррентного фильтра. Пример по элементу  $\Delta y_5$  приведён на рисунке (6.6).

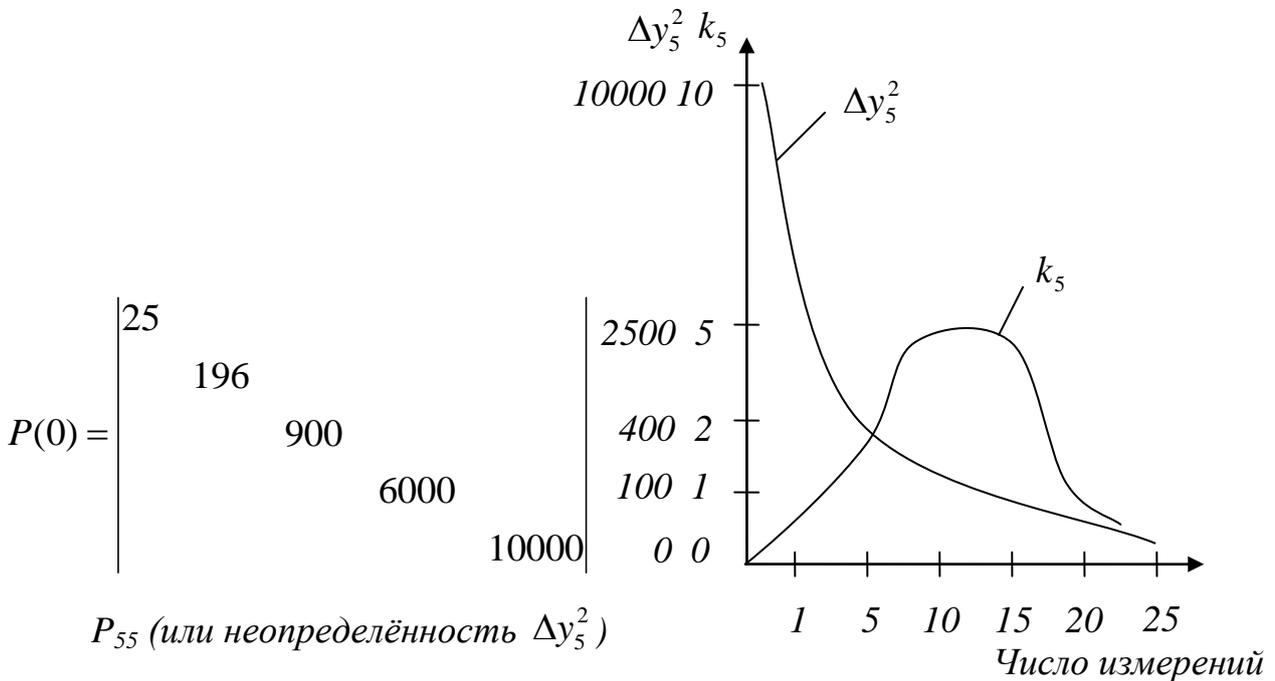


Рис. 6.6. Пример функционирования ФКБ для элемента  $\Delta y_5$ .

## **Глава 7. Идентификация как метод построения и коррекции математических моделей**

### **7.1 Представление об идентификации. Этапы развития теории идентификации**

В 1954г. советскими и американскими учеными была основана организация IFAC (International Federation of Automatic and Control), в рамках которой систематически проходят различные конгрессы, симпозиумы.

Можно считать, что наука об идентификации была обоснована в июне 1967г. на симпозиуме IFAC в Праге (Symposium of Indification of IFAC at Prague).

Основоположниками теории об идентификации являются: Н.Б. Райбман, М.А. Айзерман, В.Я. Ротач, А.С. Кулик, А.Ф. Полак и др.

Идентификация математических моделей в СТАУ – это методы и способы построения и корректировки математических моделей технологических процессов, объектов управления с использованием метода «черного ящика» на базе эксперимента.

В процессе эксперимента проводят сравнение выходных величин объекта и модели, на основе полученной информации проводят корректировку самой модели. При идентификации применяются активный и пассивный эксперименты. Для идентификации может использоваться как натурный, так и вычислительный эксперименты (вместо объекта управления (технологического процесса) используется его имитационная модель). Таким образом, при построении математических моделей объектов управления могут быть применены стохастические и детерминированные методы.

«Черный ящик» – объект управления или технологический процесс, о котором отсутствует априорная информация о его математической модели, т.е. информация о функциональной связи между входом и выходом (рис. 7.1).

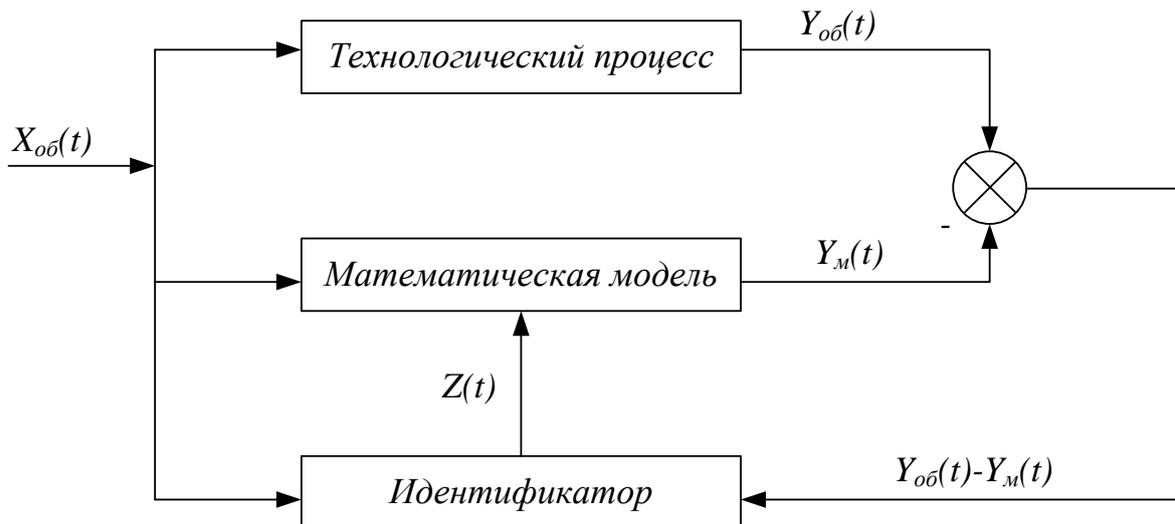


Рис. 7.1. Принципиальная структурная схема идентификации математической модели методом «чёрного ящика»:  $X_{об}(t)$ ,  $Y_{об}(t)$  – вектор входных величин объекта;  $Y_m(t)$  – выходная величина модели;  $Z(t)$  – корректирующее воздействие.

На основании данных, полученных при сравнении выходных величин объекта и модели, происходит корректировка самой модели.

Идентификация процесса – построение математической модели, устанавливающей закономерность между выходными и входными переменными процесса. При этом получаем возможность, с заданной точностью определять выходную величину процесса по его входным воздействиям.

Наши наблюдения позволяют представить некоторую эффективность Э применения методов идентификации во времени в виде графика на рис. 7.2.

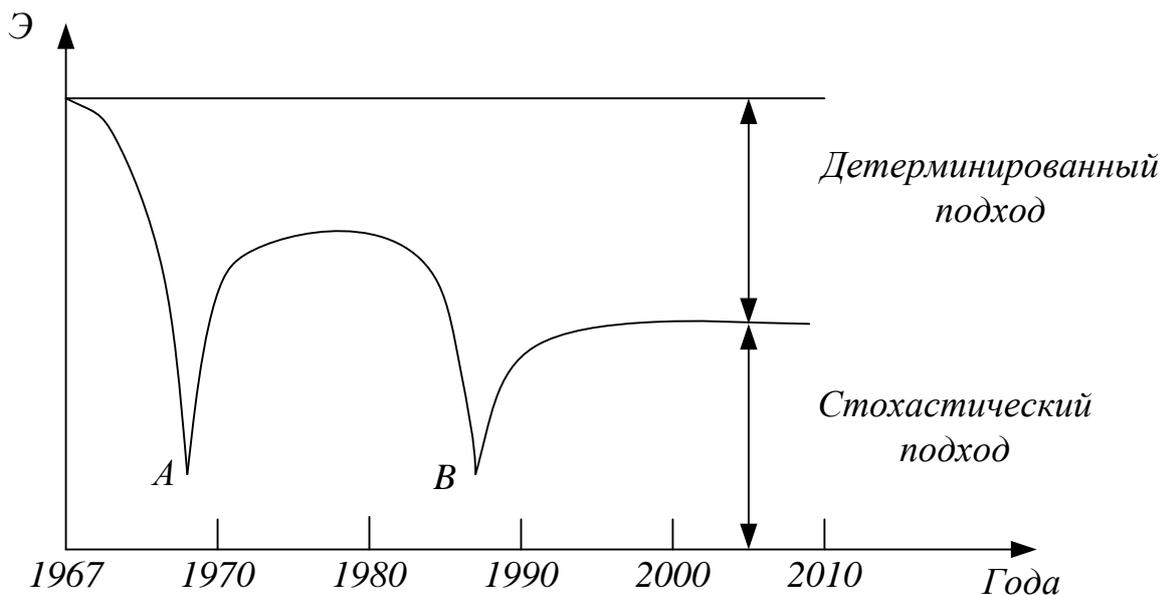


Рис. 7.2. Основные временные этапы развития теории идентификации.

Стохастический подход – это вероятностный метод определения математической модели на базе эксперимента. Детерминированный подход – это подход, при котором для получения математической модели, используются химические, физические, физико-химические, другие законы и закономерности.

На рис. 7.2. величина  $\mathcal{E}$  – некоторая условно эффективность методов идентификации в построении математических моделей. Во временном аспекте можно выделить определённые моменты резкого снижения величины  $\mathcal{E}$ , которые мы определим как некоторые «кризисы» в развитии методов идентификации.

А – первый кризис идентификации (см. рис. 7.2). Причина данного кризиса состояла в том, что использовался пассивный эксперимент. Этот кризис преодолевали, применяя активный эксперимент вместо пассивного эксперимента.

В – второй кризис (см. рис. 7.2). Причина состояла в том, что при постановке эксперимента объект всё же находился под управлением оператора. Для преодоления этой проблемы в систему идентификации включили модель оператора  $W_{on}(p)$ . Тогда модель объекта с оператором выглядит следующим образом:

$$F(p) = \frac{W_{об}(p) \cdot W_{on}(p)}{1 - W_{об}(p) \cdot W_{on}(p)} \quad (7.1)$$

Из этого уравнения можно оценивать модель собственного объекта  $W_{об}(p)$ , если известна модель оператора  $W_{on}(p)$ .

Кроме того, кризис В был ещё и связан с трудностями проведения натурного эксперимента на сложных объектах. Этим в значительной степени объясняется необходимость проведения экспериментов уже на полных моделях объектов, т.е. переход на численный эксперимент (имитационное моделирование, виртуальные объекты).

## 7.2 Идентификация и методы моделирования

В последнее время в связи с развитием микропроцессорной техники методы идентификации занимают важное место в процессе проектирования систем управления.

Нельзя обеспечить качественное управление системой, если ее модель не известна с достаточной точностью. Для построения модели могут быть использованы как теоретические, так и экспериментальные методы. Опыт, накопленный при проектировании систем управления, убедительно свидетельствует о том, что нельзя построить математическую модель, адекватную реальной системе, только на основе теоретических исследований

физических процессов в системе. Сформированная таким образом математическая модель, как правило, значительно отличается от реальной системы, что приводит соответственно к снижению качества управления. Поэтому в процессе проектирования систем управления одновременно с теоретическими исследованиями проводятся многочисленные эксперименты по определению и уточнению математической модели системы.

Эти эксперименты при разработке системы проводятся поэтапно. По мере развития процесса проектирования и накопления информации модель системы уточняется, и для ее идентификации на каждом этапе требуются соответствующие методы. В связи с этим становится актуальной задача выбора рационального метода идентификации.

Методы определения математических моделей по результатам экспериментальных исследований являются предметом теории идентификации. В зависимости от объема априорной информации о системе различают задачи идентификации в широком и узком смысле. При решении задач идентификации в широком смысле априорная информация о системе либо незначительна, либо вообще отсутствует. Система представляется в виде «черного ящика», и для ее идентификации необходимо решение ряда дополнительных задач, связанных с выбором класса модели, оценкой стационарности, линейности и др.

При решении задачи идентификации в узком смысле считается, что известны структура системы и класс моделей, к которому она относится. При этом априорная информация о системе является достаточно обширной. Такая постановка задачи идентификации наиболее соответствует реальным условиям проектирования и поэтому широко используется в инженерной практике.

Иначе говоря, в автоматизации уже давно выработаны эффективные в части управления, синтеза и анализа САУ свои, так сказать «излюбленные» структуры систем уравнений, а главной задачей идентификации при этом ставится оценка достоверных параметров этих структур, иначе говоря, проведение параметрической идентификации.

Ниже будут ещё раз рассмотрены наиболее общеприменяемые в ТАУ структуры математических моделей, способы их получения и наиболее популярные параметры этих структур, подлежащие идентификации. В основном это касается, конечно, линейных систем. Что же касается нелинейных систем и особенно объектов с распределёнными параметрами, то в этой части поле деятельности по формированию структур моделей более широкое. Тем не менее, мы попытались сформулировать понятия о достаточно обобщённой структуре математических моделей и для объектов с распределёнными параметрами. Эти модели согласно представлениям о традиционных АСУ ТП, могут использоваться в качестве содержимого имитационно-оптимизирующего уровня (суперуровня) современных АСУ ТП.

### 7.3 Этапы решения задачи идентификации

Идентификация математических моделей в СТАУ, как отмечалось – это методы и способы построения и корректировки математических моделей технологических процессов, объектов управления с использованием метода «черного ящика» на базе эксперимента.

Идентификация процесса – построение математической модели, устанавливающей закономерность между выходными и входными переменными процесса.

Данная закономерность дает возможность с заданной точностью определять выходную переменную процесса, по его входным воздействиям (переменным).

Глобальная задача идентификации разбивается на два последовательных этапа:

1-ый этап – определение структуры математической модели ( $St$ ) и назначение параметров (параметризация) модели ( $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ) в виде вектора  $A$ ;

2-ой этап – восстановление (переопределение) параметров  $\alpha_i, i=1, 2, \dots, m$  в условиях нормального функционирования процессов.

Следует отметить, что, конечно, невозможно переопределение  $\alpha$  в аварийных ситуациях.

Рассмотрим отмеченные этапы реализации задачи идентификации:

#### 1) Структурная идентификация.

Этап относится к периоду разработки системы. Решение задачи данного этапа для сложных процессов пока не формализовано, так как при структурном синтезе модели решается нетривиальная задача выбора основных переменных процесса и отбрасывание второстепенных. Это становится возможным при правильной декомпозиции процесса, что, в свою очередь, требует специальных знаний, определенных навыков, опыта разработчика, инженерной интуиции.

Так как этап структурной идентификации относится к периоду разработки (проектирования) системы в нем обычно присутствует два последовательных подэтапа:

1.1) Декомпозиция – выделение в рамках единого, сложного процесса (системы) отдельных подпроцессов (подсистем), характеризующихся как самостоятельные физические (химические) явления.

Выделенные подпроцессы следует рассматривать как сопряженные, так как они оказывают взаимное влияние друг на друга. Взаимовлияние подпроцессов (подсистем) описывается системой краевых и граничных условий.

В результате декомпозиции для синтеза модели технологических процессов можно получить уравнения:

- материального и энергетического балансов;
- гидродинамики, аэродинамики, описывающие процессы в движущихся средах;
- химических взаимодействий;
- теплообмена;
- массообмена.

В рамках детерминированного подхода для идентификации отдельных подпроцессов часто используются уравнения математической физики в виде дифференциальных уравнений в частных производных.

1.2) Параметризация – назначение параметров для гарантии единственного решения, найденного в результате декомпозиции. При этом системы уравнений, полученные в результате декомпозиции, дополняются данными (параметрами), которые не содержатся в исходных уравнениях.

Таковыми назначенными параметрами могут быть:

- геометрические условия (параметры), характеризующие форму и размеры тел, участвующих в тех или иных подпроцессах;
- физико-химические условия, задающие уровень режимов реализации процесса (уровень давления, температурные диапазоны, уровни предельных концентраций и т.д.);
- коэффициенты, характеризующие свойства вещества (плотность, вязкость, теплоемкость, теплопроводность и т.д.);
- коэффициенты, характеризующие химические взаимодействия (константы скорости реакций, химических равновесий и т.д.);
- коэффициенты, характеризующие теплоперенос и массоперенос (коэффициенты теплообмена, диффузии, турбулентности и т.д.);
- граничные условия, характеризующие взаимодействие с окружающей средой, в виде уравнений, характеризующих взаимодействие с окружающей средой и взаимодействия между подпроцессами;
- начальные условия, характеризующие исходное состояние подпроцессов на момент начала моделирования.

2) Параметрическая идентификация.

Под параметрической идентификацией понимаем процесс переопределения параметров в режиме нормальной эксплуатации объекта (процесса), при этом структура математической модели известна (определена на этапе структурной идентификации).

Этап параметрической идентификации более подробно будет рассмотрен в разделе 7.5 данной главы. А сейчас коротко рассмотрим методику типовой идентификации применяемой в классической ТАУ и относящейся к этапу структурной идентификации (структуры моделей объектов описываются с использованием аппарат передаточных функций).

## 7.4 Понятие о типовой идентификации

В классической ТАУ рассматриваются объекты управления, как объекты с сосредоточенными параметрами, которые описываются математически через аппарат передаточных функций.

При этом в ТАУ различные элементы систем выделяются в класс типовых динамических звеньев.

В этих случаях становится возможным структурный синтез передаточных функций более сложных объектов. Для этого осуществляют выбор комбинаций динамических звеньев на основе анализа формы входных и выходных сигналов.

Сущность метода типовой идентификации заключается в том, что на базе накопленного опыта и теоретических исследований в области автоматики по наиболее часто встречающимся характеристикам входных и выходных сигналов выбирается сконструированный заранее оператор (передаточная функция  $W_{объекта}(p)$ ), близкий к истинному значению неизвестного оператора объекта.

Рассмотрим типовые воздействия в задачах идентификации в рамках адаптивной параметрической идентификации (активной).

Применительно к этому подходу в автоматическом управлении отработаны и соответствующие тестовые «возмущающее» воздействия для определения параметров объекта управления.

Например, в ряде задач автоматического управления в математической модели (статическое (инерционное) звено первого порядка с запаздыванием), выражаемой передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{Ke^{-p\tau_{зан}}}{Tp+1}, \quad (7.2)$$

где  $K$ ,  $T$ ,  $\tau_{зан}$  – коэффициент передачи, постоянная времени и время запаздывания, соответственно.

Могут быть применены следующие методы активного идентификационного эксперимента (см. линию  $d3$  на рис. 2.1). При этом регулятор отключен, объект находится без управления.

1) Однократное скачкообразное возмущение (очень тяжёлое возмущение в автоматике)

При этом получаем переходную характеристику (при  $\Delta x_{вх} = 1$ ) или кривую разгона, в частности, для объектов с самовыравниванием (рис. 7.3).

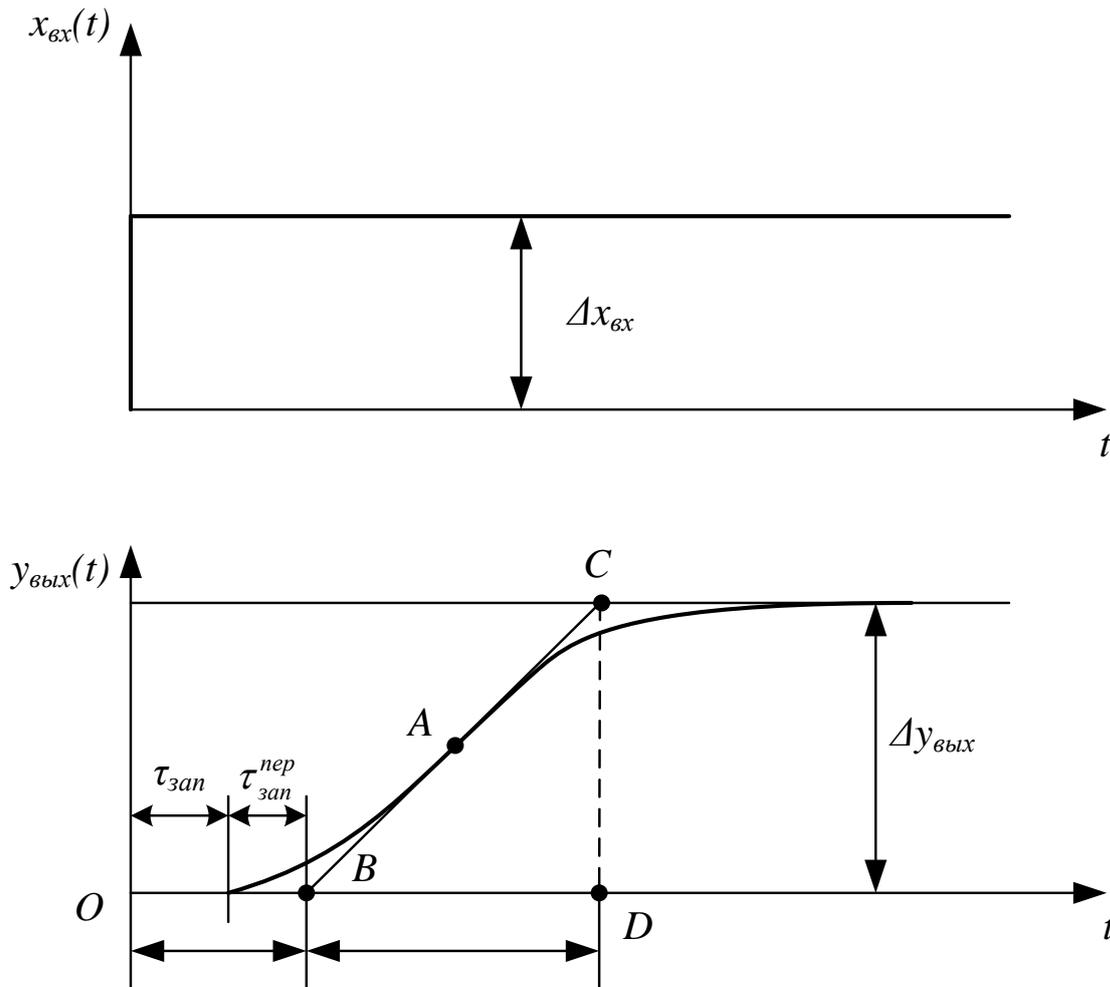


Рис. 7.3. Кривая разгона (переходная характеристика) объекта управления.

Проведя касательную к полученной кривой (линию  $CB$ ), получим для модели объекта следующие параметры:

отрезок « $OB$ » это  $\tau_{зан}^{\Sigma} = \tau_{зан} + \tau_{зан}^{пер}$  – время запаздывания;

отрезок « $BD$ » это  $T$  – постоянная времени;

$\frac{\Delta x_{вх}}{\Delta y_{вых}} = K$  – коэффициент усиления.

Ещё раз отметим, что кривую разгона можно определить как реакцию выходного параметра объекта (изменение его во времени) в ответ на однократное, скачкообразное возмущение входной величины.

Если  $\Delta x_{вх} = 1$  – единичный скачок, то такая кривая называется переходной функцией, уравнение (7.2) может быть представлено в виде:

$$T \frac{dy_{вых}(t)}{dt} + y_{вых}(t) = K \cdot x_{вх}(t) \cdot 1(t - \tau_{зан}), \quad (7.3)$$

как линейное дифференциальное неоднородное уравнение с запаздыванием.

## 2) Импульсная кривая (характеристика)

Применяется однократное скачкообразное возмущение входной величины  $\Delta x_{вх}$  и оно сразу же снимается.

В этом случае применяется метод достройки импульсной кривой до кривой разгона с получением динамической характеристики «С» по кривой разгона.

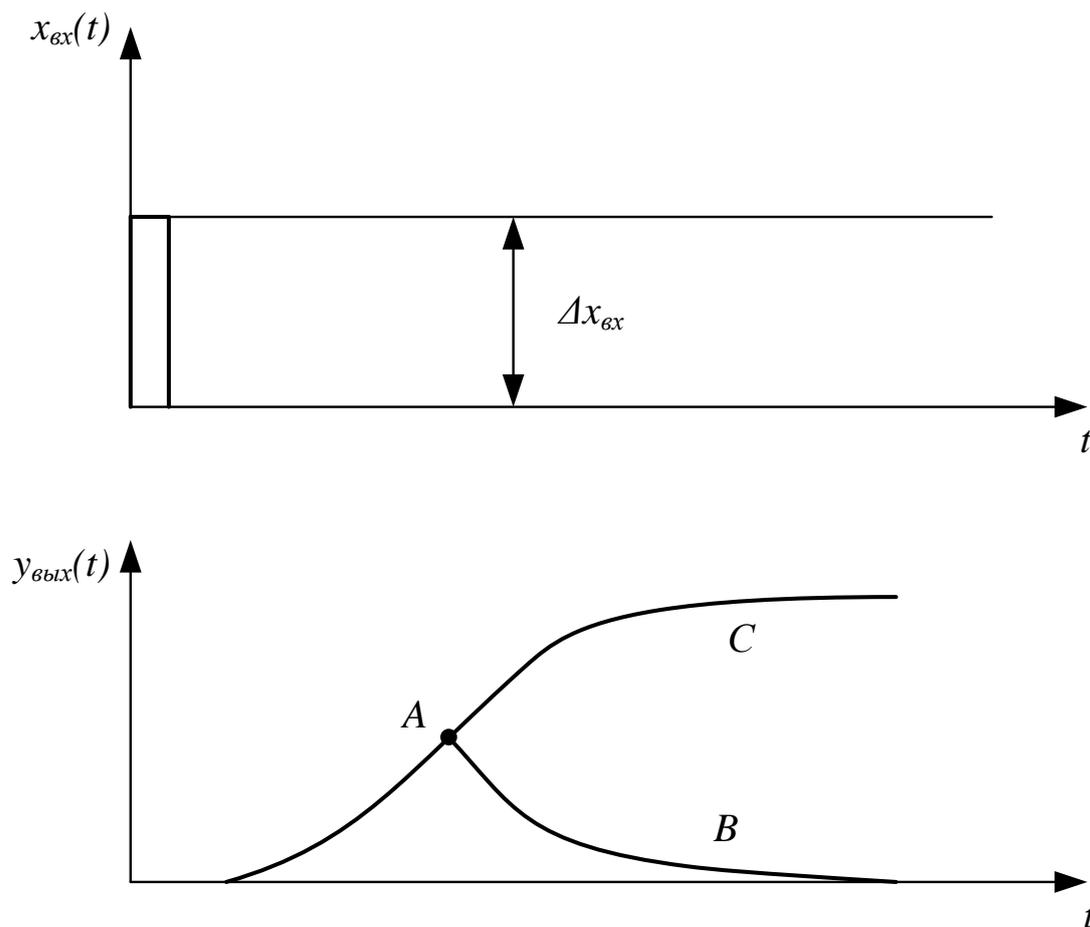


Рис. 7.4. Снятие импульсной характеристики объекта.

## 3) Получение АФХ – амплитудно-фазовой характеристики.

Её получают, создавая синусоидальное возмущение на входе объекта (рис. 7.5). Для объекта с самовыравниванием получаем реакцию выходной величины  $y_{вых}$  также в виде синусоиды со сдвигом по фазе  $\varphi$ .

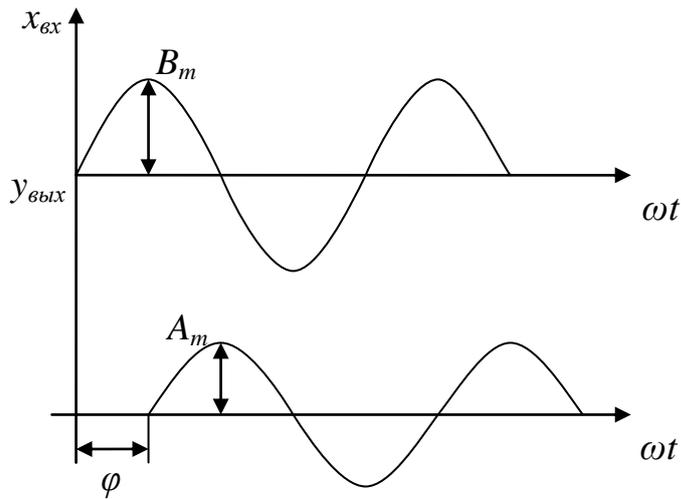


Рис. 7.5. Определение АФХ объекта управления.

Входная величина:  $B = B_m \sin(\omega t)$

Выходная величина:  $A = A_m \sin(\omega t)$

При определении АФХ частота гармонических сигналов изменяется в пределах  $\omega = 0 \div \infty$

Модуль АФХ:  $M(\omega) = \frac{A_m}{B_m}$ ; сдвиг фазы  $\varphi$ .

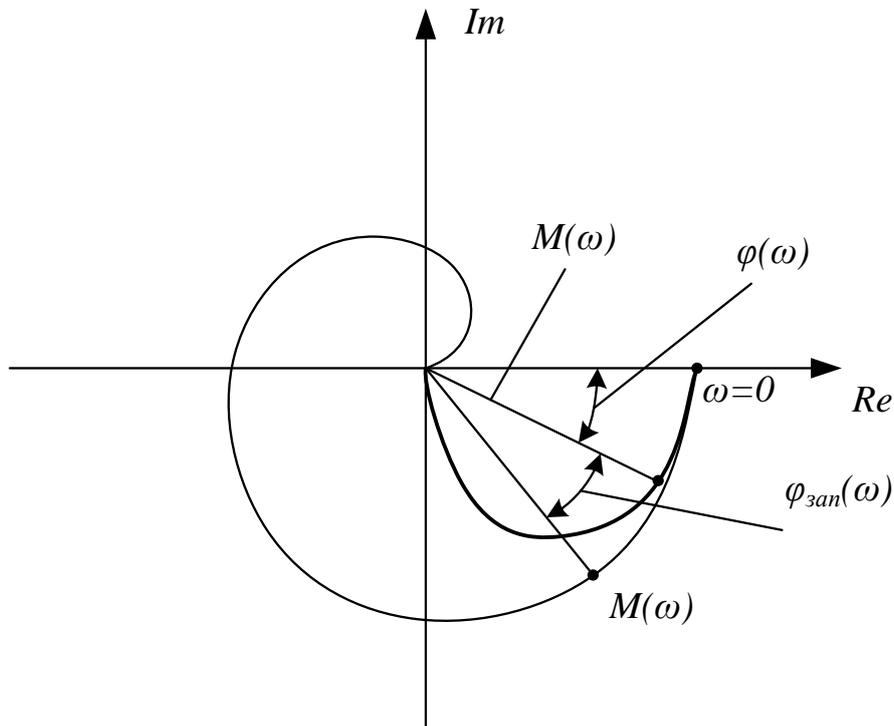


Рис. 7.6. Пример АФХ объекта с запаздыванием.

Обработка данных АФХ (рис. 7.6) позволяет определить параметры модели (7.2) по соотношениям (проводя окружность радиуса  $K/2$ ).

$$M(\omega) = \frac{K}{\sqrt{T^2 \omega^2 + 1}};$$

$$\varphi(\omega) = \text{arctg}(-T \cdot \omega);$$

$$\varphi_{зан} = -\omega \tau_{зан}.$$

4) Может быть применён метод белого шума, а также другие виды случайного воздействия.

В случае белого шума подают прямоугольные импульсы на вход, применяется статистическая обработка выходных величин объекта.

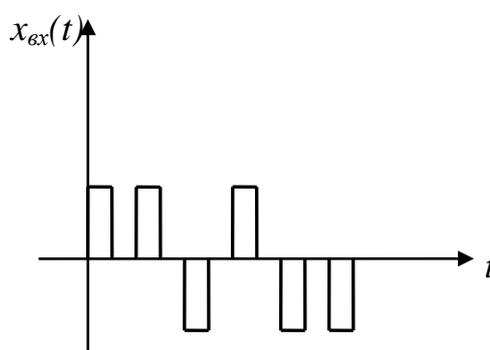


Рис. 7.7. Белый шум на входе объекта.

Методы активной идентификации применяются в адаптивных регуляторах — в этих регуляторах в зависимости от параметров объекта периодически корректируются настройки регулятора.

## 7.5 Постановка задачи параметрической идентификации. Понятие об адаптивной и неадаптивной идентификации

### Постановка задачи параметрической идентификации

Введем обозначения:

$Y$  — вектор переменных выхода;

$U$  — вектор управляющих воздействий;

$X$  — вектор переменных входа (часть наблюдений, касающихся переменных входа, контролируемые возмущения  $d_1$  по схеме Рея — см. рис. 2.1);

$A$  — вектор параметров модели;

Тогда под параметрической идентификацией понимаем процесс переопределения параметров  $A$  в режиме нормальной эксплуатации объекта, при этом структура математической модели ( $St$ .) известна и выглядит следующим образом

$$St: Y = F(X, U, A). \quad (7.4)$$

## Неадаптивная параметрическая идентификация.

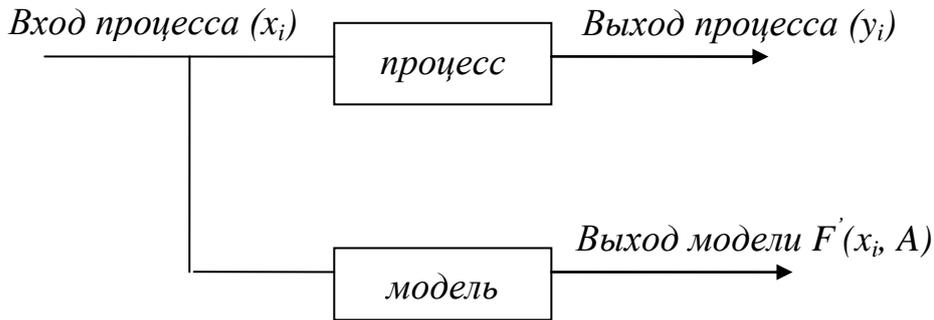


Рис. 7.8. Блок-схема неадаптивной параметрической идентификации.

В задаче параметрической идентификации (рис. 7.8) присутствуют два типа данных:

1) Априорные данные (в виде структуры математической модели):

$$St: Y = F(X, U, A)$$

$$Y = F(X, A) \Big|_{U-\text{фиксированное}}$$

В задаче идентификации, т.к. входная величина  $U$  является управляющим воздействием, она не характеризует механизм (динамику) модели, поэтому в данной задаче принято  $U = \text{const}$ ;

2) Апостериорные данные (наблюдения):

$I = \langle X_i, Y_i \rangle$ , где  $i = 1..N$  – число наблюдений,  $I$  – информация о наблюдаемых входах и выходах по  $N$  наблюдениям.

Тогда задачу параметрической идентификации можно представить следующим образом:

$$A = J(St, I), \quad (7.5)$$

где  $J$  – алгоритм идентификации.

Таким образом, в задаче идентификации необходимо отыскать такой алгоритм определения вектора  $A$ , чтобы была минимальна ошибка выходов процесса и модели при их реакции на одинаковый вход. Следовательно, эта задача находится в классе минимизационных задач, в которых отыскивается минимум погрешности моделирования по некоторому выбранному заранее критерию качества.

Неадаптивная идентификация в режиме off-line позволяет получить оптимальные оценки параметров  $A$  сразу, используя всю информацию  $I$  по  $N$  наблюдениям за достаточный отрезок времени. Такой подход возможен при использовании детерминированных динамических моделей, для которых проводится параметрическая идентификация.

## Адаптивная параметрическая идентификация

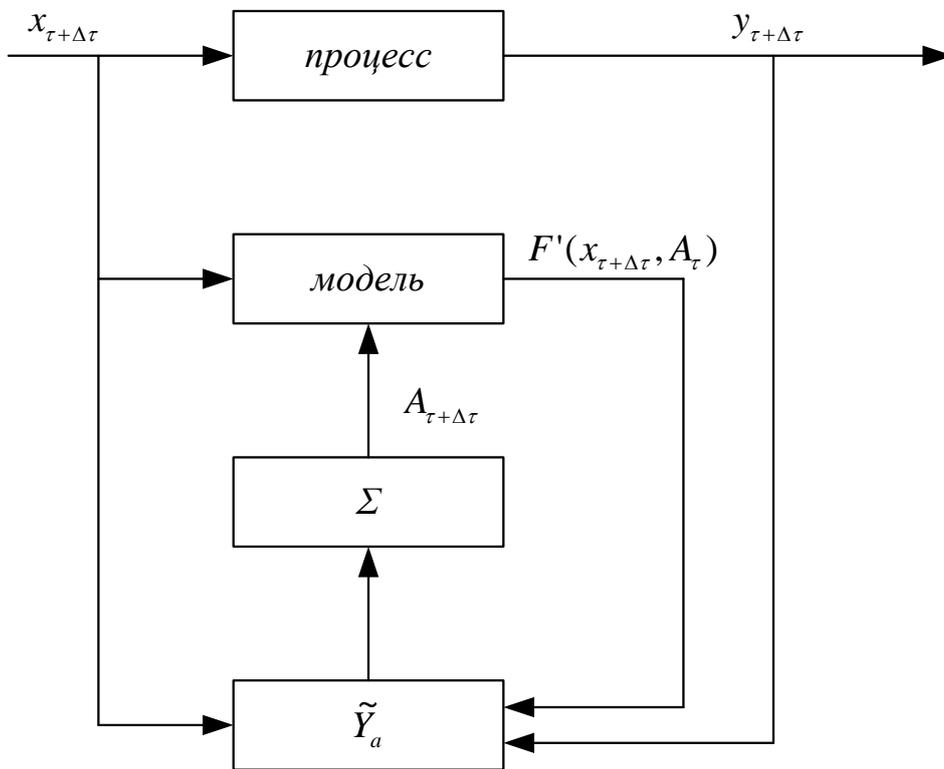


Рис. 7.9. Блок-схема адаптивной параметрической идентификации.

Адаптивная идентификация (рис. 7.9) проводится непрерывно, в режиме on-line. Она представляет собой процесс построения модели объекта в виде аналитической зависимости на основании сведений о значении искомой функции и ее аргументов. В качестве функции может выступать любой искомый обобщенный показатель, а в качестве аргументов – величины координат в пространстве состояний, параметры и показатели. Предполагается, что значения функции определяются значениями ее аргументов. Параметры зависимости функции от своих аргументов находятся автоматически по известным алгоритмам (см. рис. 7.9). Никаких предварительных соображений о структуре зависимости функции от ее аргументов и параметров запаздывания не требуется.

В режиме on-line используется вектор  $A_{\tau} = (\alpha_1^{\tau}, \dots, \alpha_m^{\tau})^T$  – т.е. параметры модели, определенные на предыдущем шаге по времени  $\tau$ . На следующем шаге получаем:  $I_{\Delta\tau} = \langle x_{\tau+\Delta\tau}, y_{\tau+\Delta\tau} \rangle$

это наблюдения за входом и выходом процесса на текущем шаге по времени  $\tau + \Delta\tau$ , тогда располагая данными о параметрах  $A_{\tau}$  и  $I_{\Delta\tau}$  с помощью адаптивного алгоритма  $\tilde{Y}_a$  надо перейти к улучшенным оценкам вектора  $A$  на текущем шаге по времени:  $(A_{\tau}, I_{\Delta\tau}) \rightarrow A_{\tau+\Delta\tau}$ , Сформулируем задачу адаптивной параметрической идентификации.

$$A_{\tau+\Delta\tau} = Y_a(A_\tau, I_{\Delta\tau}) = A_\tau + \tilde{Y}_a(F'(x_{\tau+\Delta\tau}, A_\tau), I_{\Delta\tau}). \quad (7.6)$$

Таким образом, при адаптивной идентификации в непрерывном режиме постоянно корректируются параметры  $A$  в целях обеспечения адекватности модели в пределах заданной точности.

Алгоритм  $\tilde{Y}_a$  строится как рекуррентная (непрерывная) процедура, позволяющая более рационально обеспечивать сходимость алгоритма. Понятно, что адаптивная идентификация необходима при использовании упрощенных (формальных) недетерминированных моделей, у которых природа погрешностей содержится в самой структуре моделей (в большинстве случаев статические модели).

## 7.6 Понятие о методе наименьших квадратов. Алгоритмы метода наименьших квадратов (МНК)

Задача параметрической идентификации (см. уравнение 7.5) может быть представлена следующим образом:  $A=J(St, I)$ , где  $J$  – алгоритм идентификации,

$I=\langle x_i, y_i \rangle, i=1, \dots, N$  – информация о наблюдаемых входах и выходах по  $N$  наблюдениям.

Покажем, что алгоритм  $J(St, I)$  является по существу оптимизационной задачей, поскольку выбор значений параметров модели осуществляется в соответствии с критерием качества описания апостериорных данных (наблюдений) с помощью данной модели.

Достаточно часто в инженерной практике применяются методы линейного и нелинейного регрессионного анализа. В качестве критерия наилучшего соответствия используется некоторая функция ошибки, являющаяся показателем разности между результатами модели и апостериорными данными. Наиболее часто здесь используется сумма квадратов отклонений (разностей) между экспериментальными данными (наблюдениями) и величинами, предсказанными в модели, которую требуется минимизировать. Тогда алгоритм  $J(St, I)$  называется синтезом полуэмпирических моделей по методу наименьших квадратов (МНК)

Предположим, что некоторая переменная  $y$  зависит от некоторой независимой переменной  $x$ , а связь между ними задается уравнением:

$$y = f(x, \alpha_1, \alpha_2) \quad (7.7)$$

Тогда критерии наименьших квадратов:

$$J(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=1}^N [y_i - f(x_i, \alpha_1, \alpha_2)]^2 \Rightarrow \min \quad (7.8)$$

Сумма квадратов разностей по всем  $N$  наблюдениям является мерой точности математического описания выхода процесса с использованием модели:

$$y = f(x, \alpha_1, \alpha_2) \quad (7.9)$$

Неизвестные параметры модели определяются из условия минимума функции  $J(\alpha_1, \alpha_2)$ , поэтому эту задачу можно рассматривать как задачу оптимизации, т. к. только оптимальные параметры  $\hat{\alpha}_1$  и  $\hat{\alpha}_2$  обеспечивают минимум данного критерия качества.

При решении задач идентификации применяются неадаптивные и адаптивные методы МНК.

### Алгоритм неадаптивного метода наименьших квадратов (МНК).

1) Задается вид модели:

$$St \Rightarrow y = f(x, A), \quad (7.10)$$

где  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_N)^T$  – вектор искомым параметров модели.

2) Формулируется среднеквадратичный критерий оптимальности (качества):

$$J(A) = \sum_{i=1}^N [y_i - f(x_i, A)]^2, \quad (7.11)$$

где  $x_i, y_i$  – наблюдаемые входы и выходы;  $N$  – количество наблюдений

3) Ставится задача оптимизации:

$$J(\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_m) = \min J(\alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad (7.12)$$

где  $\hat{A} = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \hat{\alpha}_m)^T$  – вектор оптимальных по МНК оценок параметров модели.

4) Записывается необходимое условие  $\min J(A)$  по  $A$ :

$$\text{grad } J(\hat{A}) = \left( \frac{\partial J}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial J}{\partial \alpha_j}, \dots, \frac{\partial J}{\partial \alpha_m} \right)^T = 0 \quad (\text{при } A = \hat{A}). \quad (7.13)$$

5) Записывается решение системы из  $m$  уравнений вида:

$$\frac{\partial J(A)}{\partial \alpha_j} = -2 \sum_{i=1}^N [y_i - f(x_i, A)] \cdot \frac{\partial f(x_i, A)}{\partial \alpha_j} = 0 \text{ при } A = \hat{A},$$

$$\text{для } j=1, \dots, m. \quad (7.14)$$

После определения параметров вектора  $A$  записывается среднее квадратическое отклонение, которое оценивает качество выбранной  $St$  модели:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \left[ y_i - f(x_i, \hat{A}) \right]^2}{N - m}}. \quad (7.15)$$

В качестве примера использования алгоритма неадаптивного МНК рассмотрим простейшую (линейную) регрессионную модель. В соответствии с уравнением (7.4) примем, что:

$$St: y = \alpha_1 + \alpha_2 x = f(x, A).$$

Тогда критерий оптимальности в соответствии с выражением (7.8):

$$J = \sum_{i=1}^N (y_i - \alpha_1 - \alpha_2 x_i)^2.$$

Условия минимума функции  $J$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial \alpha_1} = 0; \\ \frac{\partial J}{\partial \alpha_2} = 0. \end{cases}$$

Дифференцируя величину  $J$  по  $\alpha_1$   $\left( \frac{\partial J}{\partial \alpha_1} = 0 \right)$ , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha_1} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \sum_{i=1}^N (y_i - \alpha_1 - \alpha_2 x_i)^2 = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (y_i - \alpha_1 - \alpha_2 x_i)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^N [-2(y_i - \alpha_1 - \alpha_2 x_i)] = -2 \left( \sum_{i=1}^N y_i - N\alpha_1 - \alpha_2 \sum_{i=1}^N x_i \right) = 0 \end{aligned}$$

Из последнего уравнения получаем:

$$N\hat{\alpha}_1 + \left( \sum_{i=1}^N x_i \right) \hat{\alpha}_2 = \sum_{i=1}^N y_i$$

Аналогично для  $\frac{\partial J}{\partial \alpha_2} = 0$  получаем:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_2} = -2 \sum_{i=1}^N [y_i - \alpha_1 - a_2 x_i] x_i = -2 \left( \sum_{i=1}^N y_i x_i - \sum_{i=1}^N x_i \alpha_1 - \sum_{i=1}^N x_i^2 \alpha_2 \right) = 0$$

$$\left( \sum_{i=1}^N x_i \right) \alpha_1 + \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 \right) \alpha_2 = \sum_{i=1}^N y_i x_i$$

В итоге имеем два уравнения:

$$\begin{cases} N \hat{\alpha}_1 + \left( \sum_{i=1}^N x_i \right) \hat{\alpha}_2 = \sum_{i=1}^N y_i; \\ \left( \sum_{i=1}^N x_i \right) \hat{\alpha}_1 + \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 \right) \hat{\alpha}_2 = \sum_{i=1}^N y_i x_i. \end{cases}$$

Вводя соответствующие обозначения, систему уравнений приведём к виду:

$$\begin{cases} a_{11} \hat{\alpha}_1 + a_{12} \hat{\alpha}_2 = b_1 \\ a_{21} \hat{\alpha}_1 + a_{22} \hat{\alpha}_2 = b_2 \end{cases}$$

Обозначим детерминанты:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}; \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & \alpha_{12} \\ b_2 & \alpha_{22} \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & b_1 \\ \alpha_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Тогда решение системы уравнений для определения параметров регрессии получаем в виде:

$$\hat{\alpha}_1 = \Delta_1 / \Delta; \hat{\alpha}_2 = \Delta_2 / \Delta.$$

### **Пример использования метода наименьших квадратов при параметрической идентификации.**

Определение параметров уравнения состояния для реального газа, исходя из уравнения состояния для идеального газа (выражение Менделеева-Клайперона):

$$PV = RT,$$

где:  $P$  – давление, МПа (атм.);

$V$  – молярный объем, см<sup>3</sup>/г · моль;

$T$  – температура, К;

$R$  – универсальная газовая постоянная (82,06 атм · см<sup>3</sup> / г · моль · К).

Для реального газа полуэмпирическое уравнение представляющее нелинейную регрессию в соответствии с выражением (7.4):

$$St: P = \frac{RT}{V - a_2} - \frac{\alpha_1}{V(V + \alpha_2)\sqrt{T}} \quad (7.16)$$

это уравнение представляет собой априорные данные.

Для оценки параметров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  используем экспериментальные (апостериорные) данные по зависимости  $P=f(V)$  по двуоксиду углерода ( $\text{CO}_2$ ).

Таблица 7.1.

Экспериментальные (апостериорные) данные зависимости объёма  $\text{CO}_2$   $V$  от его давления  $P$ .

№ наблюдения	$Y_i$ $P_i, \text{ атм}^{1)}$	$\overbrace{V_i}^{X_i}, \text{ см}^3/(\text{г} \cdot \text{моль})$	$T, \text{ К}$
1	33	500	273
2	43	500	273
3	45	600	273
⋮	⋮	⋮	⋮
8	63,6	400	273

В соответствии с уравнениями (7.4) и (7.5) в данной таблице представлены величины  $I, i = 1, \dots, 8$ , т.е. апостериорные данные, по совокупности это информация  $I = \langle X_i, Y_i \rangle, i = 1, \dots, 8$ .

Постановка задачи с использованием метода наименьших квадратов.

Определить параметры  $\alpha_1, \alpha_2$  если критерий оптимальности (качества) – см. уравнение (7.8):

$$J(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=1}^N \left[ P_i - \frac{RT_i}{V_i - \alpha_2} + \frac{\alpha_1}{V_i(V_i + \alpha_2)\sqrt{T_i}} \right]^2 \Rightarrow \min$$

Приведём числовую иллюстрацию для наблюдения  $i = 1$ :

$$\left( 33 - \frac{82,06 \cdot 273}{500 - \alpha_2} + \frac{\alpha_1}{500(500 + \alpha_2)\sqrt{273}} \right)^2.$$

Наличие ошибок в измерениях, а также в отдельных допущениях, принимаемых в модели физического процесса, приводит к тому, что  $J(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0$  даже в точке оптимума. В результате расчётов получаем:

$$\hat{\alpha}_1 = 6,377 \cdot 10^7;$$

$$\hat{\alpha}_2 = 29,7;$$

$$J = 9,7 \cdot 10^{-2}.$$

<sup>1)</sup> 1 атм = 0,0981 МПа.

## Адаптивные алгоритмы МНК

### 1) Метод дискретной формы градиента

В этом случае оценка  $\hat{A}$  вычисляется в виде рекуррентной процедуры, т.е. последовательно по шагам, для которой организуется цикл со счетчиком  $k=0,1,2,\dots$ :

$$\hat{A}^{(k+1)} \Big|_{\hat{A}_\tau \xrightarrow{\varphi\alpha} \hat{A}_{\tau+\Delta\tau}} = \hat{A}^{(k)} + j \operatorname{grad} \tau(\hat{A}^{(k)}), \quad j < 0 \quad (7.17)$$

В скалярной форме получаем:

$$\hat{\alpha}_j^{(k+1)} = \hat{\alpha}_j^{(k)} + j \frac{\partial \tau(\hat{A}^{(k)})}{\partial d_j}, \quad \text{для } j = \overline{1, m} \quad (7.18)$$

где  $j$  – параметр, обеспечивающий сходимость алгоритма (подбирается эвристическим путем).

При реализации этого алгоритма используется величина  $\hat{A}^{(0)}$  – начальная точка, которая задается на основании эвристических  $A_\tau$ , при этом на шаге  $\tau + \Delta\tau$ :  $\hat{A}_{\tau+\Delta\tau}^{(0)} = \hat{A}_\tau$ .

В адаптивных алгоритмах реального времени большое значение приобретает скорость сходимости данного итерационного процесса, которую можно характеризовать числом шагов при переходе от начальной точки к оптимальному значению вектора  $\hat{A}$ .

### 2) Итеративный релаксационный алгоритм

На цикле  $k=0,1,2,\dots$  используем алгоритм

$$\hat{A}^{(k+1)} \Big|_{\hat{A}_\tau \xrightarrow{\varphi\alpha} \hat{A}_{\tau+\Delta\tau}} = \hat{A}^{(k)} - [D^{(k)-1}] \operatorname{grad} \tau(\hat{A}^{(k)}), \quad (7.19)$$

где  $D = D^T \cdot Q$ .

В данном алгоритме матрица весовых коэффициентов определяется как обратная по отношению к матрице  $D$ .

$$Q = \begin{vmatrix} \frac{\partial f(x_1, A)}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial f(x_1, A)}{\partial \alpha_n} \\ \dots & \frac{\partial f(x_i, A)}{\partial \alpha_j} & \dots \\ \frac{\partial f(x_N, A)}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial f(x_N, A)}{\partial \alpha_n} \end{vmatrix} \quad A = \hat{A}^{(k)}. \quad (7.20)$$

Релаксационный алгоритм является более общим, по сравнению с методом дискретной формы градиента, так как здесь используется величина итерации с нелинейными коэффициентами  $D$ , зависит от всех составляющих градиента функции  $J(A)$ , при этом весовые коэффициенты матрицы  $D$  нелинейно зависят от оценок  $A^k$  и рационально реализуют величину шага.

3) Может быть использован также алгоритм соответствующий обобщенному методу Ньютона.

$$\hat{A}^{(k+1)} \Big|_{\hat{A}_\tau \xrightarrow{\varphi\alpha} \hat{A}_{\tau+\Delta\tau}} = \hat{A}^{(k)} - \left[ \frac{d^2 \tau(\hat{A}^{(k)})}{dA^2} \right] \text{grad } \tau(\hat{A}^{(k)}); \quad (7.21)$$

$$dA^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 J(A)}{\partial \alpha_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 J(A)}{\partial \alpha_1^2, \partial \alpha_j} & \dots & \frac{\partial^2 J(A)}{\partial \alpha_1^2, \partial \alpha_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 J(A)}{\partial \alpha_m, \partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial^2 J(A)}{\partial \alpha_m, \partial \alpha_j} & \dots & \frac{\partial^2 J(A)}{\partial \alpha_m^2} \end{vmatrix}, \quad (7.22)$$

где  $j$  – счетчик параметров  $\alpha$ .

Однако необходимость вычисления вторых производных функции  $J$  приводит к большим вычислительным затратам, что ограничивает использования этого алгоритма в случае адаптивной идентификации.

## Глава 8. Постановка задачи оптимизации и задача оптимального управления

### 8.1 Постановка задачи оптимизации в подсистеме оптимального управления

В данной главе задача оптимизации рассматривается применительно к работе подсистемы оптимального управления (см. рис. 2.1).

Будем использовать следующие обозначения:

$F(X, U)$  – математическая модель процесса;

$X$  – вектор входного воздействия;

$U$  – вектор управляющих воздействий;

$d_2$  – вектор неконтролируемых возмущений;

$z^*$  – формализованные цели управления.

Блок-схема задачи оптимизации приведена на рис. 8.1. При этом оценивается состояние процесса и ведётся наблюдение за процессом.

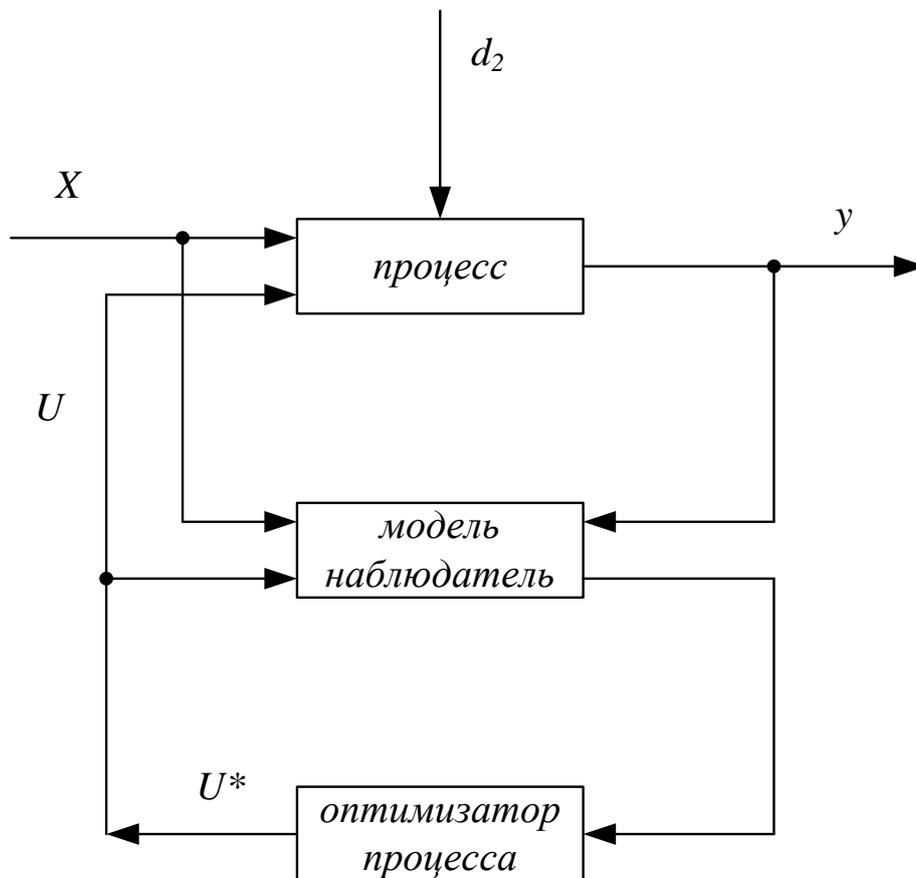


Рис. 8.1. Блок-схема задачи оптимизации.

Задача оптимизации технологического процесса связана с принятием решения о том, каким должно быть управление  $U$ , чтобы достичь заданных целей управления  $z^*$  в условиях текущей информации о динамическом состоянии процесса, отображаемого моделью  $F(X, U)$ , а также ресурсах управления (временных, материальных, энергетических и т.д.) при определённых ограничениях.

В задаче оптимального управления определяются целевые условия:

$$z^* : \begin{cases} G(x, y) = \emptyset - \text{характеристика не экстремальных целей}; \\ H(x, y) \geq 0 - \text{технологические допуски, ограничения}; \\ Q(x, y) \rightarrow \min, U \in \Omega - \text{экстремальные цели}. \end{cases} \quad (8.1)$$

Математическая формулировка задачи оптимального управления:

$$\Omega^* : \begin{cases} G(x, F(x, U)) = \emptyset \\ H(x, F(x, U)) \geq 0 \\ Q(x, F(x, U)) \rightarrow \min, U \in \Omega \end{cases} \quad (8.2)$$

Здесь  $Q(x, y)$  – критерии качества управления, согласно которым минимизируется (максимизируется) некоторая величина, определяющая протекание процесса в оптимальном режиме.

## 8.2 Роль математической модели в задаче оптимального управления

Из соотношения (8.2) следует, что реализовать целевые условия  $z^*$  можно только на основе оценки соответствующего состояния процесса  $Y$ . Это означает, что при соответствующем выборе управления  $U$  должна использоваться математическая модель  $F(X, U)$ , так как именно эта модель описывает полное состояние процесса. По этому состоянию процесса и проверяется выполнимость технологических ограничений, и принимаются решения по оптимальному управлению. При этом следует учитывать, что внешнее возмущение  $X$  изменяется по собственным закономерностям и нередко со стохастической составляющей.

Отметим две важные роли математической модели:

1) Оценка текущего состояния процесса с целью определения условий оптимальности этого состояния и выполнения технологических требований (ограничений);

2) Использование модели в имитационном режиме с целью прогноза состояния процесса на ближайшее будущее при выборе оптимального управления  $U^*$ .

При выборе структуры оптимизационной задачи выделяют функционал (критерий оптимальности)  $Q(X, F(X, U))$  и определяют систему управления:

$$\Omega = \begin{cases} G(X, Y) = 0, \\ H(X, Y) \geq 0, \\ Y = F(X, U) \end{cases} \quad (8.3)$$

Так как математическая модель, как имитатор состояния процесса, оказывается как бы встроенной в оптимизационную задачу, то последнюю правильнее записывать в каноническом виде. Выражения  $Q$ ,  $G$ ,  $H$  являются функционалами, так как в них входит функция математического моделирования.

Задача оптимального управления в классической постановке представляет собой динамическую задачу, и управление  $U$  ищется как функция времени с прогнозом на «ближайшее будущее».

Однако, конечно, имеется класс оптимизационных задач, которые можно считать статистическими. Например, это распределение каких-либо ресурсов на определенный момент времени.

Математическое решение статистических задач изложено, в так называемом, математическом программировании, которое часто используется в задачах экономики.

Оптимальное управление динамическим объектом может сводиться к решению вариационной задачи  $U^* = U(t)$ , в которой искомое управление представляет собой функцию во времени, а выражения  $Q$ ,  $G$  и  $H$  являются функционалами  $U(t)$ .

В задачах математического программирования искомое управление представляет собой вектор:

$$(U_1, U_2, \dots, U_q)^T, \quad (8.4)$$

где выражения  $Q$ ,  $G$  и  $H$  являются векторными функциями управления  $U$ .

С точки зрения решения оптимизационной задачи векторное представление очень сильно облегчает решение.

В вариационных задачах особенно для объектов с распределенными параметрами, заданные функционалы являются чрезмерно большими и для них приходится доказывать теорему существования решения в классе вариационных задач. Вариационные задачи, как правило, разрешимы для объектов с сосредоточенными параметрами.

### 8.3 Задача «о такси»

В качестве примера простейшего решения оптимизационной задачи приведём, так называемую, задачу «о такси». В этой задаче надо найти такое скалярное управление  $U^*(t)$ , которое обеспечивало бы минимальное время прохождения автомобиля (такси) от одного регулируемого перекресткам до другого.

Рассмотрим структуру модели состояния процесса.  
Запишем уравнение движения такси в виде:

$$(St) f : \frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha_1 \frac{dy}{dt} = \alpha_2 U(t), \quad (8.5)$$

где  $y$  – пройденный путь;  
 $\alpha_1, \alpha_2$  – параметры торможения и разгона;  
 $U(t)$  – управление ускорением движения.

Условия ограничения:

$$a1 \leq U(t) \leq a2, \quad (8.6)$$

где  $a1$  – сила торможения;  
 $a2$  – максимальное усилие;

Вводится также величина  $w \leq a3$  – ограничение скорости движения.

Обозначим через:  $T=T(U(t))$  – время движения;  $L$  – расстояние между перекрестками. Тогда формулировка оптимизационной задачи будет иметь вид:  $T(U(t)) \rightarrow \min$  – критерий качества (оптимальности):

$$U(t) \in \Omega, \text{ где } \Omega = \begin{cases} y(0) = y(T), y(T) = L; \\ y(t) \leq a3; \\ a1 \leq U(t) \leq a2; \\ y + \alpha_1 y = \alpha_2 U(t). \end{cases}$$

Графическая интерпретация решения задачи представлена на рис. 8.2.

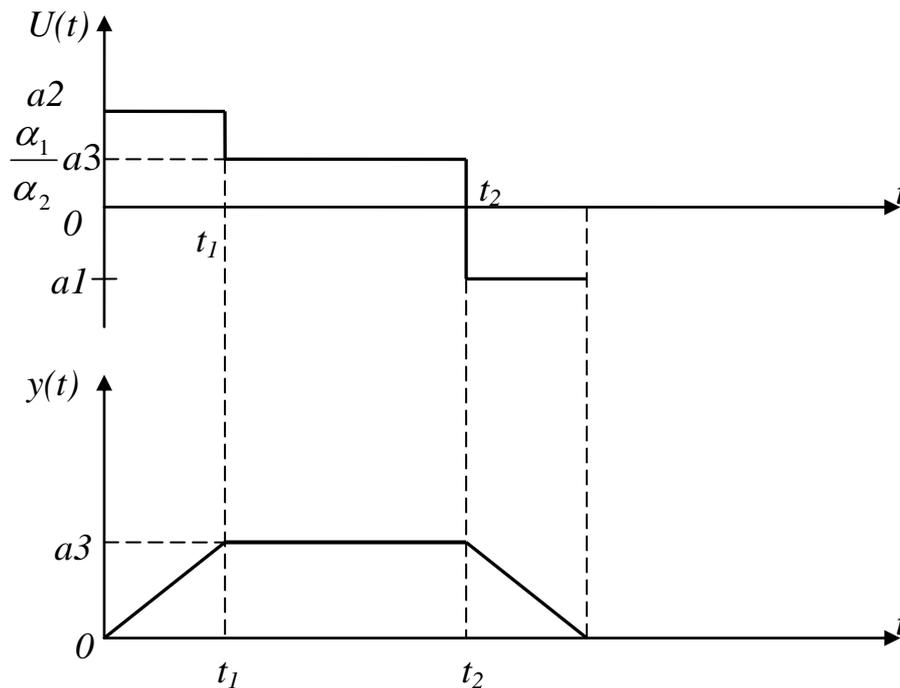


Рис. 8.2. Динамика управления  $U(t)$  и  $y(t)$  в задаче «о такси».

При движении от перекрёстка до перекрёстка существуют три момента переключения управления:

$$\left. \begin{aligned} U_1^*(t) &= a2 \text{ (до момента } t_1) \\ U_2^*(t) &= \frac{\alpha_1}{\alpha_2} a3 \\ U_3^*(t) &= a1 \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

Влияние среды  $X$  (например, состояние дорожного покрытия) можно ввести в виде функций:

$$\left. \begin{aligned} a1 &= a1(x) \\ a3 &= a3(x) \end{aligned} \right\}$$

$$a1^* > a1$$

Проникновение функций в ограничение, что усложняет функционалы.

Таким образом, в данной задаче синтез оптимального управления заключается в отыскании двух моментов переключения управления  $t_1$  и  $t_2$ .

## 8.4 Сведение вариационной задачи оптимального управления к задаче математического программирования

1) Непрерывный случай (параметрический подход)

Для использования аппарата математического программирования необходимо параметризовать функцию  $U(t)$ .

Функция  $U(t)$  разлагается в ряд по заданной системе функций:  $\{\Phi_i(t)\}$ , при этом функция  $U(t)$  представляется в виде ряда:

$$U(t) = \sum_{i=1}^h C_i \Phi_i(t) \quad (8.8)$$

Это постановка приводит к задаче отыскания параметров  $(C_1, C_2, \dots, C_k)^T$ .

2) Дискретное (интервальное) представление оптимизационной задачи.

В этом случае  $U(t)$  представляется дискретами (рис. 8.3):

$$\left. \begin{aligned} U(t) &\rightarrow U_1, U_2, \dots, U_i, \dots, U_k; \\ U_i = U(t_i) &= [U_1(t_i), U_2(t_i), \dots, U_k(t_i)]^T \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

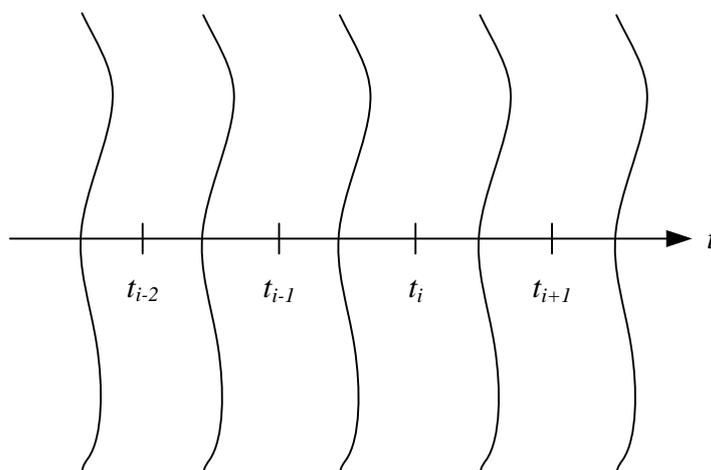


Рис. 8.3. Интервальное представление оптимизационной задачи.

В обоих рассмотренных случаях, используя указанные представления величины  $U(t)$ , вариационную задачу можно свести к задаче математического программирования.

Математическое программирование – это математическая дисциплина, изучающая теорию и методы решения задач о нахождении экстремумов функций на множествах конечномерного векторного пространства, определяемых линейными и нелинейными ограничениями (равенствами и

неравенствами). Формально задача математического программирования формулируется так:

$$\arg \min_{x \in X} f(x) \quad (8.10)$$

В зависимости от характера множества  $X$  задачи математического программирования классифицируются как:

- задачи дискретного программирования (или комбинаторной оптимизации) – если величина  $X$  конечна или счётная;
- задачи целочисленного программирования – если величина  $X$  представлена подмножеством множества целых чисел;
- задачи нелинейного программирования, если ограничения и/или целевая функция содержат нелинейные функции и величина  $X$  является подмножеством конечномерного векторного пространства;
- если же все ограничения и целевая функция содержат лишь линейные функции, то такая задача, называется задачей линейного программирования.
- 

Кроме того, разделами математического программирования являются параметрическое программирование, динамическое программирование и стохастическое программирование. Математическое программирование используется при решении оптимизационных задач исследования операций. В этом случае выделяется критерий оптимальности  $Q(X, Y) \rightarrow \min, U \in \Omega$  с условиями:

$$\Omega \begin{cases} G(X, U) = 0; \\ H(X, Y) \geq 0; \\ Y = F(X, U), \end{cases} \quad (8.11)$$

где  $U$  – вектор оптимального управления  $U = (U_1, U_2, \dots, U_q)^T$ ;  
 $\Omega, G, H$  – векторные функции управления  $U$ .

Простота решения задачи математического программирования заключается в том, что выражения  $Q, G, H$  выражаются в явном виде, как функции вектора управления  $U$ .

Таким образом, отпадает необходимость обработки решения задачи, создающей сложный функционал.

Для многомерных распределенных процессов при данном подходе отсутствуют какие-либо ограничения на размерность функции модели.

## 8.5 Понятие «пространства состояний»

С целью облегчения процедуры формализации технологических ограничений, накладываемых на координаты процесса с распределенными параметрами, было введено понятие пространства состояний, в котором отыскивается, прежде всего, желаемое состояние, а также оптимальное управление  $U^*(t)$ , которое обеспечивает оптимальное состояние.

Фазовые координаты рассматриваемого процесса определяются как (рис. 8.4):

$$Y(t_i) = [y_1(t_1), y_2(t_2), \dots, y_n(t_i)]^T. \quad (8.12)$$

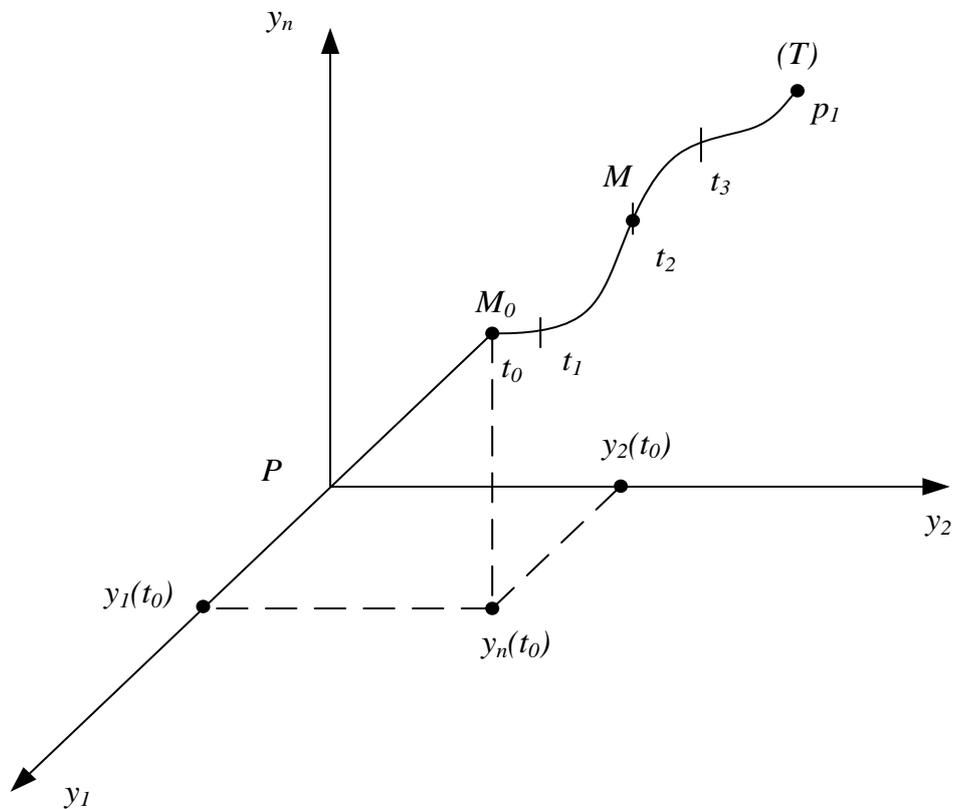


Рис. 8.4. Пространство состояний (при  $n=3$ ).

Определяется значение  $P$  – область допустимых состояний, из которой не может выпасть фазовая траектория.

Данная система координат является пространством состояний. Для него характерны следующие действия:

- 1) Определяется начальное состояние (т.  $M_0$ )

$$Y(t_i) = [y_1(t_0), y_2(t_0), \dots, y_n(t_0)]^T. \quad (8.13)$$

- 2) Вводятся воздействия  $U(t)$  и  $X(t)$ .
- 3) Проводится решение системы уравнений:

$$F[X(t), U(t)]/ y(t_0). \quad (8.14)$$

4) Находится решение задачи (фазовая траектория)

$$Y[t, X(t), U(t), y(t_0)] \text{ для } t \geq t_0 \quad (8.15)$$

При этом  $Y(t) \in P(Y)$ .

Точка  $M$  называется изображающей.

Условно можно принять, что изображение точки движется в пространстве состояний, а оставляемый ею след, как результат выбранного управления, представляет собой траекторию движения объекта или процесса  $Y(t) \in P_1$ , где  $P_1$  – подобласть допустимых конечных состояний.

### 8.6. Наиболее часто используемые критерии качества управления динамическими объектами

По виду критерия оптимальности задачи оптимального управления подразделяются на следующие разновидности:

1) Задача о минимальной длительности переходного процесса (или «максимального быстродействия»):

$$\left. \begin{array}{l} \text{в условиях ограничения на } |U(t) \leq C, C = \text{const}| \\ Q = T = \int_0^T dt \rightarrow \min, U(t) \in \Omega \end{array} \right\}. \quad (8.16)$$

2) Задача о максимальной точности воспроизведения:

Величина  $T$  – фиксировано; имеют место случайные возмущения по  $X(t)$  и  $d2$ :

$$Q = M \{ \varepsilon^2(t) \} \rightarrow \min \quad U(t) \in \Omega \quad (8.17)$$

где величина  $\varepsilon(t)$  порождена возмущением по  $X(t)$  и  $d2$  как составляющая выходного процесса системы;  $M$  – символ осреднения.

3) Задача о минимуме расхода топлива:

*величина  $T$  – не фиксирована;*

$$\left. \begin{array}{l} Q = V_{\Sigma} = \int_0^T V(t) dt \rightarrow \min, V(t) = \Omega; \\ \Omega: \begin{cases} Y(t) = P_1; \\ V(t) \leq V_{\max}. \end{cases} \end{array} \right\} \quad (8.18)$$

## 8.7 Задача оптимизации распределённого технологического процесса с использованием линейного программирования

Постановка задачи применительно к энерготехнологическому процессу.

Это задача по критерию минимума энергетических затрат в последовательно включенных агрегатах (зонах, рис. 8.5). По существу, это задача оптимизации технологических режимов для производств конвейерного типа с целью минимизации расхода топлива в энерготехнологиях, так как любые подобные технологии подвержены колебаниям производительности (темпам обработки). Данная задача является оптимизационной в динамическом смысле этого слова, и в связи с этим очень важную роль играет нацеленность имитационного моделирования при выборе управления не на текущий момент, а на ближайшее будущее.

Имитационный характер модели придает наличие в системе моделирования прогнозной модели состояния внешней среды (при этом учитывается вектор  $dI$  – контролируемые возмущения). Иными словами, с использованием модели прогнозируется план процесса, реализуемость планов процессов.

Интегральным управляющим воздействием при этом является величина  $U(t) = V_{\Sigma}$  – суммарный расход топлива на все агрегаты (зоны).

Целевая функция формулируется в виде:

$$Q = V_{\Sigma} = \int_0^T V(t) dt \rightarrow \min, V(t) \in \Omega, \quad (8.19)$$

где  $T$  – время процесса.

Соотношение (8.19) обозначает, что в данном технологическом процессе ставится задача минимизация ресурса (расхода топлива). Типичным для этого случая является нагрев материала в нагревательных проходных печах (с движущимися лентами).

При этом могут быть введены различные ограничения, в том числе и требования на качество продукции (через задание соответствующих температур обработки материала).

Например, может быть задано:

$$\Omega: \left\{ \begin{array}{l} Y(t) \in P_i - \text{подобласть желаемых конечных состояний} \\ V(t) \leq V_{\max} - \text{допустимый предел расхода} \\ T = T(t) \rightarrow \text{var } ia - \text{но фиксировано на момент } i; \\ \text{при этом } Y(t) = F[X(t_i), U(t_i), Y(t_i)] \end{array} \right\} \quad (8.20)$$

Модель – как поставщик информации о том, какое будет состояние при управлении и внешней среде.

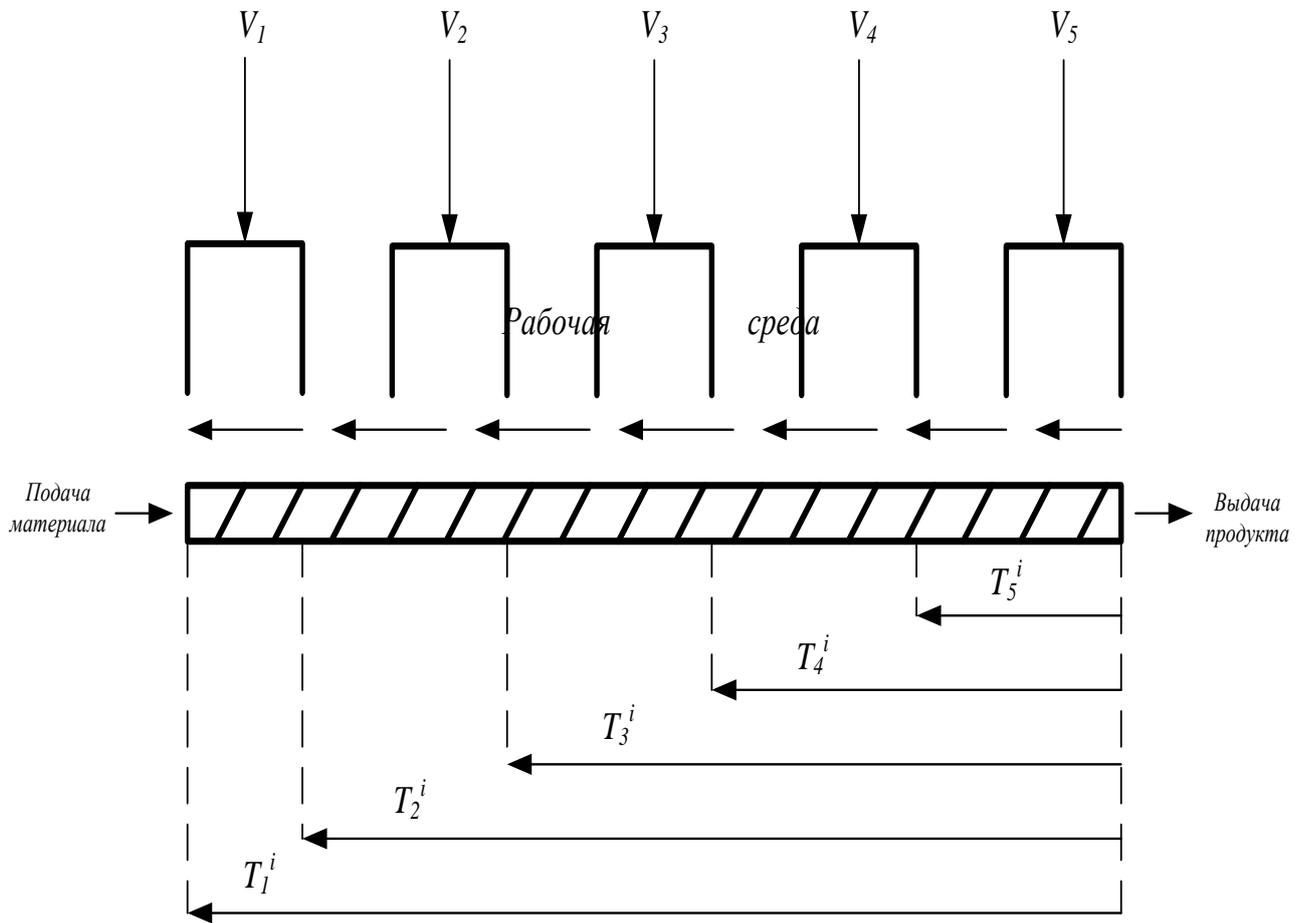


Рис. 8.5. Схема к задаче о минимуме энергетических затрат. Счётчики:  $i$  – счётчик по агрегатам;  $V$  – по расходам.

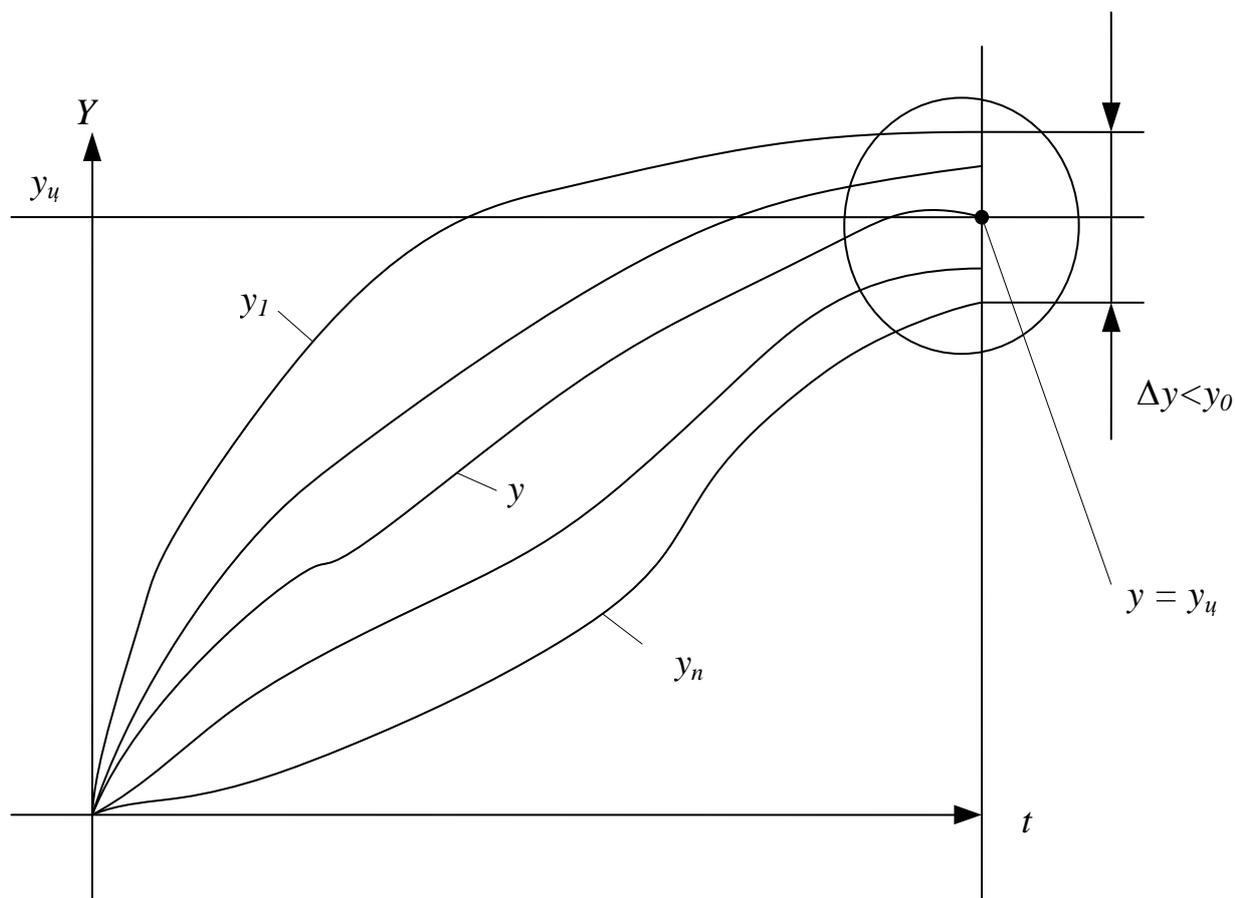


Рис. 8.6. Характер изменения выходных величин объекта во времени.  $y_t$  – среднемассовое значение температуры на выходе;  $y_u$  – среднемассовое целевое значение, которое задается;  $\Delta y_u$  – заданный перепад между температурами поверхности обрабатываемого материала и его среднемассовой температурой в конце процесса нагрева.

Основная интрига оптимизации суммарного расхода топлива заключается в следующем: при возрастании производительности, естественно необходимо повышать и расход топлива  $V_\Sigma$ . Между тем, главная задача оптимизации заключается в правильном распределении расхода топлива  $V_\Sigma$  между агрегатами (зонами).

Теплофизика нагрева устанавливает, что если при повышении производительности использовать в большей степени агрегаты 4 и 5, тогда весьма благоприятным будет использовать схему, так называемого противотока, что приводит к увеличению производительности. Но при увеличении расхода топлива в конце нагрева  $V_5$ , будет увеличиваться перепад температур  $\Delta y_u$  и однозначно будут нарушены ограничения по конечному перепаду температуры.

Таким образом, первый подход гарантирует условие:

$$Q = V_{\Sigma} \rightarrow \min, \quad (8.21)$$

но уравнение (8.21) противоречит выполнению условий по перепаду температур  $\Omega$ .

В задаче оптимизации нужно искать компромисс и выстраивать прогноз как будет изменяться управление при изменении условий нагрева. Второй подход гарантирует качество нагрева (по перепаду температур), но противоречит уравнению (8.21).

### **Формулировка задачи в классе математического программирования.**

В этой задаче оценивается не насколько нужно уменьшить расход топлива, а, на сколько нужно его скорректировать (рис. 8.7).

Критерий оптимальности формулируется в виде:

$$Q^i = \sum_{j=1}^5 W_j^i \Delta V_j^i \rightarrow \min, V \in \Omega, V_j^i = V_j^{i+1} + \Delta V_j^i. \quad (8.22)$$

где  $W_1^i > W_2^i > W_3^i > W_4^i > W_5^i$  – взвешивающие коэффициенты, которые определяют стратегию управления отдельными зонами. Их числовые значения оцениваются в соответствии с требованиями технологии.

Вводится система ограничений:

$$\Omega: \begin{cases} \bar{y}_T^{i-1} + \left(\frac{\partial \bar{y}_T}{\partial V_1}\right)^i \Delta V_1^i + \left(\frac{\partial \bar{y}_T}{\partial V_2}\right)^i \Delta V_2^i + \dots + \left(\frac{\partial \bar{y}_T}{\partial V_5}\right)^i \Delta V_5^i = y_u; \\ \Delta y^{i-1} + \left(\frac{\partial \bar{y}_T}{\partial V_1}\right)^i \Delta V_1^i + \left(\frac{\partial \bar{y}_T}{\partial V_2}\right)^i \Delta V_2^i + \dots + \left(\frac{\partial \bar{y}_T}{\partial V_5}\right)^i \Delta V_5^i \leq y_u; \\ -(V_j^{i-1} + \Delta V_j^i) + (V_{j+1}^{i-1} + \Delta V_{j+1}^i) \leq DV_{j,j+1}, j = 1, 2, 3, 4; \end{cases} \quad (8.23)$$

$$V_j, \min \leq V_j^i + \Delta V_j^i \leq V_j, \max, j = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (8.24)$$

здесь  $\left(\frac{\partial \bar{y}_T}{\partial V}\right)^i$  – коэффициент дифференциальной чувствительности – показывает, как изменяется среднемассовая температура при изменении значения топлива в агрегате;

$DV_{j,j+1}$  – максимально допустимая разница между расходами топлива в отдельных агрегатах (зонах).

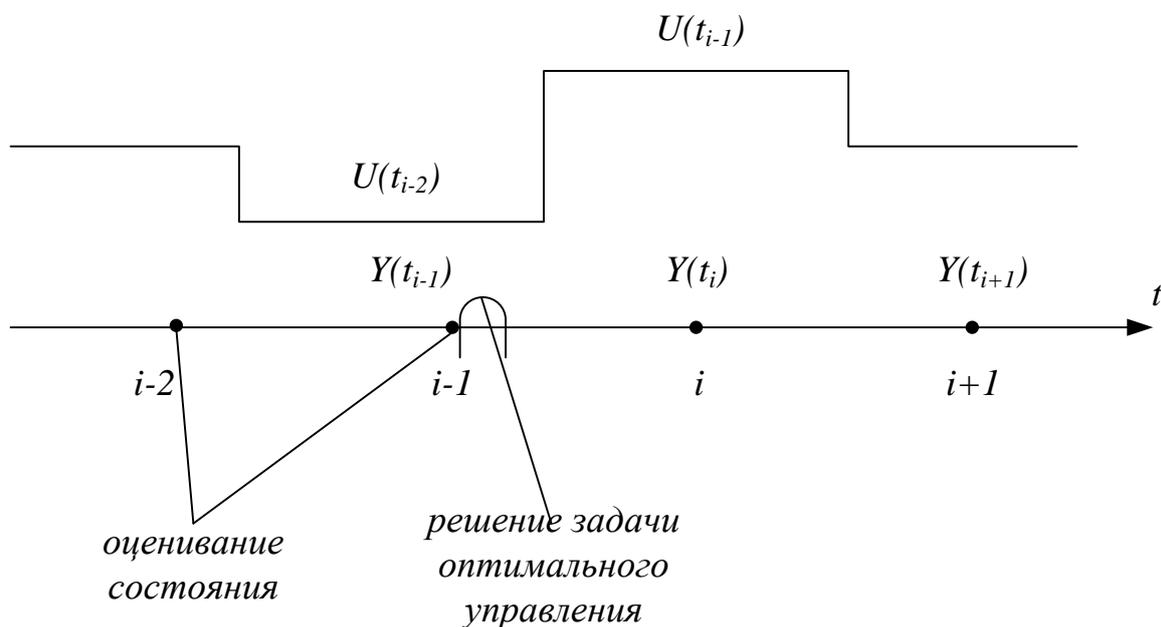


Рис. 8.7. Схема решения задачи оптимального управления.

Данная задача является задачей линейного программирования с фиксированными коэффициентами при агрегатах на каждый временной слой  $i$ . Индекс  $i$  говорит о том, что стратегией оптимизации можно варьировать.

Коэффициенты дифференциальной чувствительности системы  $\Omega$  являются функциями текущего динамического состояния процесса и определяются в блоке 5 по схеме Рея с использованием модели (см. рис. 2.1). Число уравнений в системе не должно быть меньше, чем число агрегатов (зон) ( $j$ ).

Данная задача линейного программирования решается хорошо известным популярным симплекс-методом.

Достижение оптимального решения задачи определяется таким управляющим воздействием  $\Delta V_j$ , при котором ограничения  $\Omega$ , а также величина  $Q \rightarrow \min$ .

Несмотря на то, что, на каждом  $i$ -ом временном слое решается статическая задача математического программирования, по совместимости решений во времени (на  $i, i+1 \dots$ ), мы имеем динамическую интервальную задачу непрерывной оптимизации. При этом коэффициенты дифференциальной чувствительности являются динамическими (т.е. она переопределяются на каждом временном слое) и служат для адаптации оптимизационной задачи к текущим нестационарным условиям.

## **Глава 9. Системы диагностики и роль математического моделирования**

### **9.1 Определение систем диагностики. Классификация систем диагностики. Их место среди информационно-управляемых систем и технологий**

Системы диагностики (СД), которые относятся к классу измерительных систем (ИС), предназначены для контроля, диагностирования, сертификации, идентификации, распознавания и мониторинга состояния наблюдаемых объектов.

Мир объектов диагностирования (объектов второй природы) весьма широк и включает в себя объекты, буквально, от предметов бытовой техники до аэрокосмических аппаратов.

Мир объектов первой природы, в последнее время, тоже стал предметной областью информационного мониторинга их состояния. Сюда относят сейсмомониторинг, гидромониторинг, метеомониторинг, мониторинг объектов живой природы, включая мониторинг состояния здоровья человека.

В последнее десятилетие, осуществляя классификацию систем диагностики оборудования сложных технических объектов, выделяют следующие системы:

- информационно-диагностические сети и системы;
- автономные диагностические приборы и системы;
- виртуальные диагностические приборы.

Для выполнения процедур диагностирования, сертификации, распознавания и мониторинга состояния объектов наблюдения применяются технологии, которые относятся к одному из классов информационных технологий, а именно, к информационным технологиям технической диагностики и мониторинга (TDM-технологии).

TDM-технологии, по определению, строятся на основе статических моделей системы и динамических (имитационных) моделей процессов развития, движения, деградации и гибели. Другими словами, для диагностирования требуются диагностические статические модели, а для мониторинга – имитационные модели движения (тренда) состояния объекта наблюдения.

**Понятие о диагностической системе, роль математической модели и идентификации в проблеме диагностики.**

Диагностика – это инструментальное (с помощью расчётов) обследование объектов диагностики (ОД) с последующей системной обработкой измерительной информации с целью определения наиболее точного диагноза о состоянии ОД.

Основная цель диагностики – это управление состоянием ОД с целью обеспечения его работоспособности.

Технологическая диагностика – оценка текущего состояния технологического процесса с целью последующего его оптимального управления.

Методика оценки состоит в использовании, наряду с показаниями датчиков, математической модели, так как она даёт достаточно полную информацию об объекте диагностики (ОД).

В технологической диагностике наиболее общим математическим аппаратом является теория оценивания состояний. Оценивание состояний осуществляется посредством адаптивной математической модели, тогда как идентификация – это процедура построения или корректировки самой математической модели.

## **9.2 Отличительные особенности моделирования TDM-систем от систем автоматического управления (САУ)**

Главной отличительной особенностью моделирования TDM-систем от САУ является то, что системы САУ, какими бы законами управления они не были бы наделены (программное управление, управление по возмущениям или управление с обратными связями), требуют разработки математической модели в виде единого уравнения, куда входят передаточные функции, как объекта управления, так и собственно системы управления.

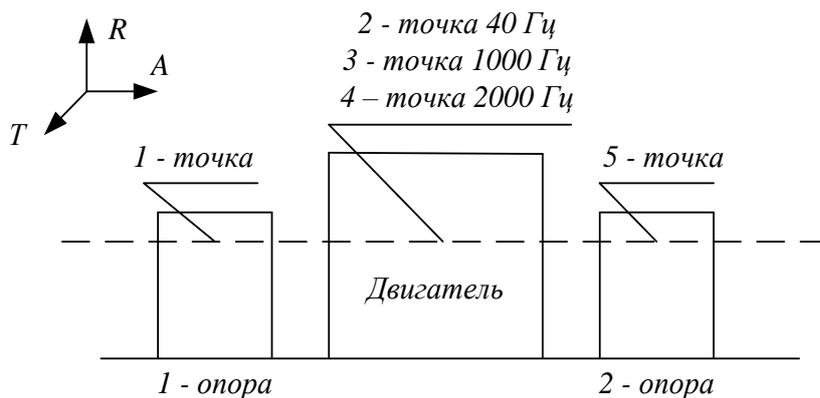
Для TDM-систем, которые при любой технологии всегда являются разомкнутыми, объект наблюдения и система контроля (диагностики, идентификации, диагностики и мониторинга) всегда требуют построения собственных моделей. При этом должны разрабатываться и использоваться как статические, так и динамические или имитационные модели.

## **9.3 Статическая модель объекта наблюдения**

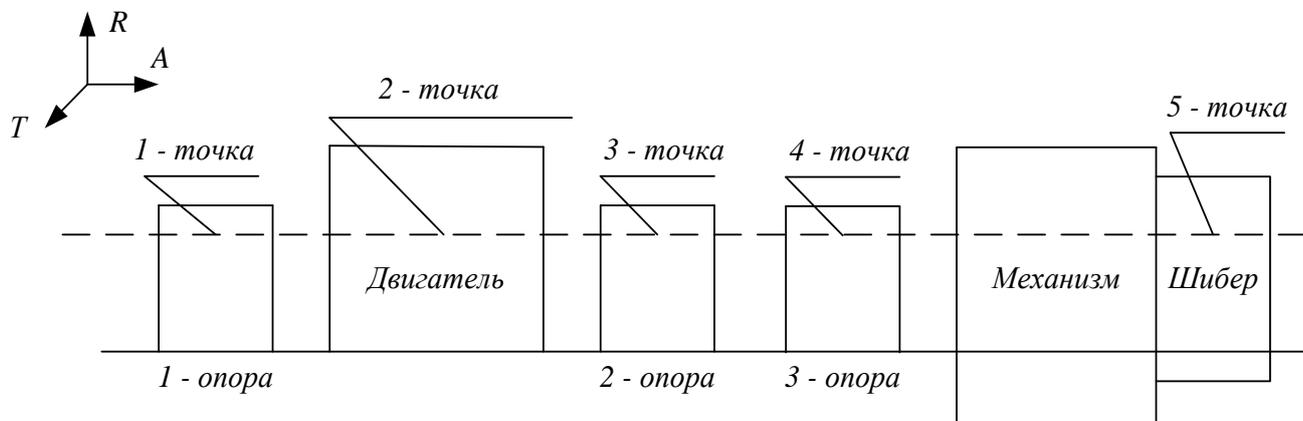
В качестве примера статической модели рассмотрим электрооборудование котельного цеха крупной городской ТЭЦ. В его число, как правило, включают дымососы, дутьевые вентиляторы и дымососы рециркуляции газов. Для диагностики оборудования могут эффективно применяться вибрационные методы.

На рис. 9.1. приведены выбранные для контроля элементы конструкции, точки съёма (1,2,...) и направления съёма ( $A, R, T$ ) вибрационных параметров дымососа. На корпусе асинхронного двигателя находятся три точки замера информации. Вызвано это тем, что приходится снимать диагностическую информацию в различных диапазонах частот. Так, исходя из опыта вибрационной диагностики, для определения частоты скольжения необходим диапазон от 0,2 Гц до 40 Гц, для контроля общего состояния

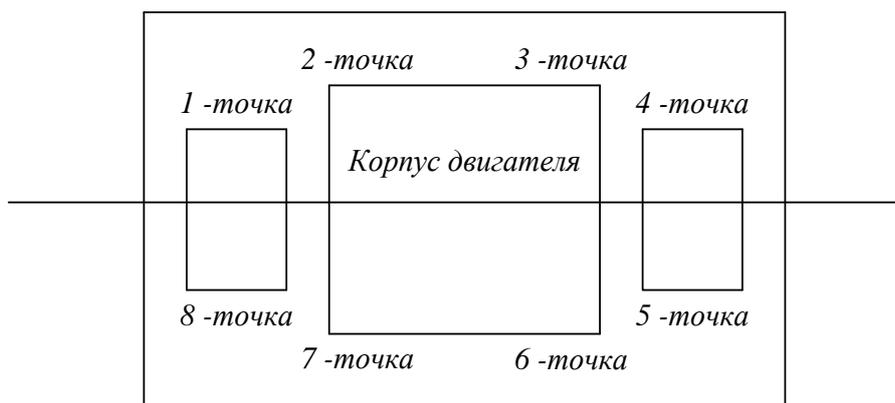
электромагнитной системы двигателя необходим диапазон от 5 Гц до 1000 Гц, а для контроля вентиляторов двигателя – диапазон от 10 Гц до 2000 Гц.



а) Асинхронный двигатель дымососов



б) Валопровод дымососов



в) Крепление дымососов к фундаментам

Рис. 9.1. Точки и направления съёма диагностической информации на низконадёжных элементах дымососах.

С учетом выбранных для контроля конструктивных элементов, точек и направлений замеров вибрации, а также технологических ( $H_p$ ) и температурных ( $T_p$ ) параметров, концептуальная статистическая модель технического состояния асинхронного двигателя дымососа запишется в виде:

$$K_5 m T z(D) = \{H_p + T_p + (5ART)_D\}. \quad (9.1)$$

Концептуальные статистические модели состояния дутьевого вентилятора и дымососа рециркуляции газов будут аналогичны модели дымососа. Их отличие заключается только в числе точек съема информации.

#### 9.4 Статическая модель системы контроля, диагностики и мониторинга технического состояния двигателя дымососа

Рассмотрим концептуальную статическую модель системы контроля, диагностики и мониторинга (СКДМ) технического состояния асинхронных двигателей, построенную с помощью теории шкал. После определения (выбора) структуры функций СКДМ и, заменив их шкалами, (рис. 9.2.) получим:

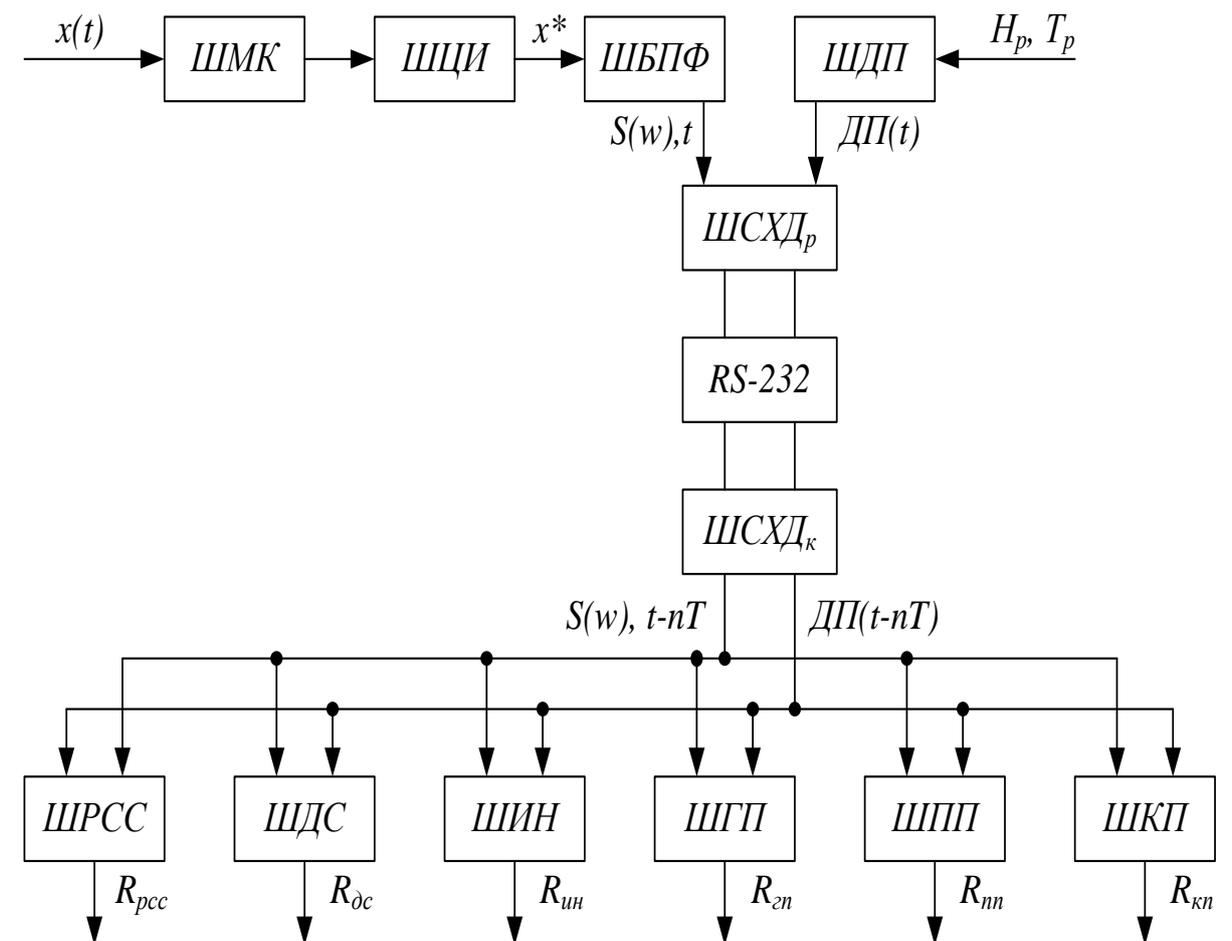


Рис. 9.2. Концептуальная статическая модель системы контроля, диагностики и мониторинга (СКДМ).

Обозначения на рисунке 9.2 концептуальной статической модели системы контроля, диагностики и мониторинга (СКДМ):

*ШМК* – шкала метрологического кодирования;

*ШЦИ* – шкала цифровых измерений;

*ШБПФ* – шкала быстрых преобразований Фурье;

*ШДП* – шкала дополнительных параметров;

*ШСХД<sub>р</sub>* – шкала сбора и хранения данных прибора и *ШСХД<sub>к</sub>* – шкала сбора и хранения данных компьютера, соединяемые через порт *RS-232*;

*ШРСС* – шкала расчетов скорости скольжения ротора;

*ШДС* – шкала диагностирования состояний;

*ШИН* – шкала идентификации неисправностей;

*ШГП* – шкала генезиса параметров;

*ШПП* – шкала прогнозирования параметров;

*ШКП* – шкала корреляции параметров;

*x(t)* – входной сигнал вибрации в точке съема информации.

Кроме того, *H<sub>р</sub>*, *T<sub>р</sub>* – дополнительные технологические и температурные параметры соответственно; *S(w)*, *ДП(t)* – выходные параметры коллектора/сборщика и одновременно входные параметры технологического компьютера.

Выходными параметрами шкал, реализованных на технологическом компьютере, являются: *R<sub>рсс</sub>* – результат расчета скорости скольжения ротора; *R<sub>дс</sub>* – результат диагностики состояния объекта; *R<sub>ин</sub>* – результат идентификации неисправностей; *R<sub>гп</sub>* – результат генезиса параметров; *R<sub>пп</sub>* – результат прогноза параметров; *R<sub>кп</sub>* – результат корреляции параметров.

Следовательно, концептуальная дескриптивная статическая модель *СКДМ* является структурой ее функциональных модулей, представленной структурой шкал.

В дескриптивном виде концептуальная статическая модель *СКДМ* может быть представлена следующим выражением:

$K_{sm}(СКДМ) = \{ШМК, ШЦИ, ШБПФ, ШДП, ШСХД_p, ШСХД_k, ШРСС, ШДС, ШИН, ШГП, ШПП, ШКП\}$ .

## Глава 10 . Высокотемпературная диагностика в энерготехнологиях.

### 10.1 Физические основы ИК-пирометрии (основные законы излучения)

Законы теплового излучения получены применительно к идеальному абсолютно черному телу (АЧТ) и термодинамическому равновесию. **Равновесным** (черным) излучением называется такое, при котором все тела, входящие в данную излучающую систему, принимают одинаковую температуру. Тепловое излучение носит динамический характер: при одинаковых температурах каждое из тел как испускает, так и поглощает лучистую энергию, причем в одинаковых количествах ( $\Phi_{\text{рез}}=0$ ).

Зависимость спектральной плотности потока излучения АЧТ, Вт/м<sup>3</sup> от длины волны и температуры (рис.10.1) устанавливается **законом Планка**:

$$E_0^\lambda = \frac{C_1}{\lambda^5} (e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1)^{-1}, \quad (10.1)$$

где  $\lambda$  – длина волны, м;  $C_1 = 3,7418 \cdot 10^{-16}$  – первая константа излучения, Вт·м<sup>2</sup>,  $C_2 = 1,4388 \cdot 10^{-2}$  – вторая константа излучения, м·К.

Излучение, характеризующееся спектром, подобным спектру равновесного излучения (при  $T=\text{const}$ ), называется **серым**.

Если произведение  $\lambda T$  мало по сравнению с постоянной  $C_2$ , то в зависимости (10.1) можно пренебречь единицей, и она переходит в уравнение, представляющее собой **закон Вина**:

$$E_0^\lambda = \frac{C_1}{\lambda^5} e^{-\frac{C_2}{\lambda T}}, \quad (10.2)$$

Положение максимума излучения определяется из выражения:

$$\lambda_{\text{max}} T = 2,8978 \cdot 10^{-3}, \quad (10.3)$$

здесь  $\lambda_{\text{max}}$  – длина волны, которой соответствует максимальная плотность излучения (единица измерения произведения  $\lambda_{\text{max}} T$  – м · К).

Зависимость (10.3) выражает закон смещения Вина. Согласно этому закону, максимальная величина спектральной плотности потока излучения с повышением температуры сдвигается в сторону более коротких волн.

**Закон Стефана-Больцмана** устанавливает зависимость плотности потока интегрального полусферического излучения АЧТ от температуры:

$$E_0 = \int_0^{\infty} E_0^\lambda d\lambda = \sigma_0 T^4, \quad (10.4)$$

где  $\sigma_0$  – постоянная Стефана-Больцмана,  $5,669 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>К<sup>4</sup>).

Закон Стефана-Больцмана может быть применен к серым телам. В этом случае используется положение о том, что у серых тел, так же как и у черных, собственное излучение пропорционально абсолютной температуре в четвертой степени, но энергия излучения меньше, чем энергия излучения черного тела при той же температуре.

Тогда для серых тел этот закон примет вид:

$$E = \varepsilon E_0, \quad (10.5)$$

Здесь  $\varepsilon = E/E_0$  – **интегральная степень черноты (интегральная излучательная способность)** серого тела.

Таким образом, **интегральной степенью черноты** называется отношение поверхностной плотности потока собственного интегрального излучения к его величине для абсолютно черного тела при той же температуре.

Применение закона Стефана-Больцмана для серого тела является строгим в той мере, в какой строго постоянной, не зависящей от температуры остается степень черноты. Однако в действительности степень черноты серого тела зависит от его природы, температуры, состояния поверхности и в большинстве случаев определяется экспериментальным путем.

Для узкого спектрального диапазона энергия излучения реального тела со спектральной степенью черноты  $\varepsilon^\lambda$  и температурой  $T$  записывается аналогично выражению (10.5):

$$E^\lambda(T) = \varepsilon^\lambda E_0^\lambda(T), \quad (10.6)$$

Это выражение соответствует сигналу монохроматического пирометра.

Если величина  $\varepsilon^\lambda$  неизвестна и на пирометре выставлено значение  $\varepsilon^\lambda=1.0$ , то показания последнего соответствуют так называемой **яркостной** (или видимой) температуре:

$$E^\lambda(T) = E_0^\lambda(T_\lambda), \quad (10.7)$$

При условии, что  $\varepsilon^\lambda=const$ , тело называют серым.

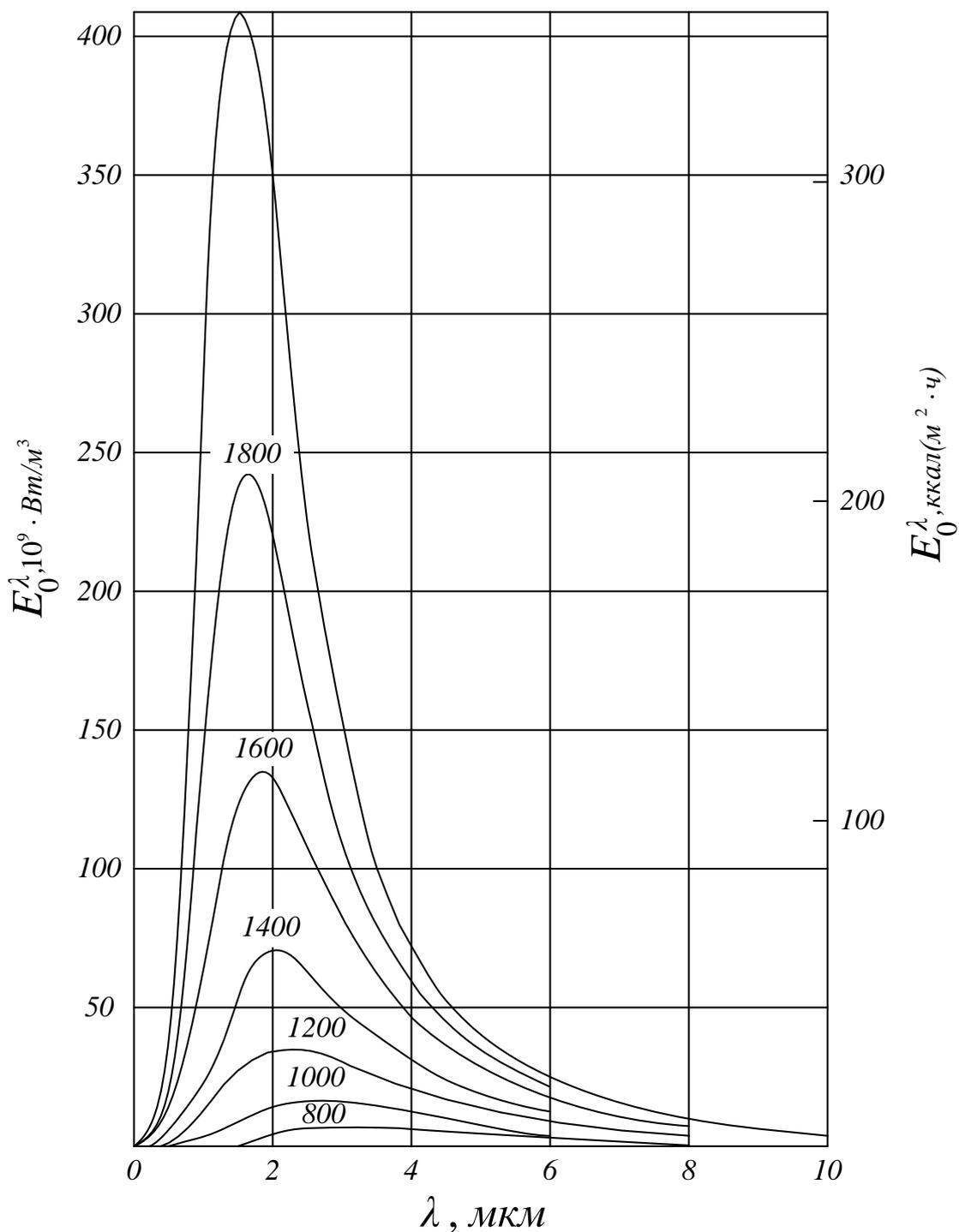


Рис. 10.1. Спектральная плотность излучения абсолютно чёрного тела при некоторых температурах.

## 10.2 Особенности ИК-диагностики температурного состояния объекта, экранированного продуктами сгорания

В энерготехнологических агрегатах при сгорании органических топлив бесконтактный метод измерения температуры пирометрами излучения часто

осложняется тем, что на длине пути луча от пирометра до дистанцируемого тела находятся продукты сгорания.

Для оценки потока собственного излучения металла, по которому может быть пирометром определена температура его поверхности, при измерениях пирометром необходимо знать плотность падающего на металл потока излучения. Так, в условиях нагревательных печей, значительные трудности представляют измерения  $q_{\phi}$  и  $q_2$  (рис. 10.3), вследствие существенной неизотермичности факела и газообразных продуктов сгорания. Поэтому большой практический интерес представляет поиск, в промышленных условиях, спектральных диапазонов с минимальной степенью черноты печной атмосферы, так называемых «окон прозрачности». Организация измерений в этих «окнах» с использованием яркостных пирометров с достаточно узкой спектральной чувствительностью позволяет отфильтровать фоновые излучения факела и продуктов сгорания и оставить только одну составляющую отражённого излучения, полностью определяемую потоком эффективного излучения кладки  $q_{кл}$  (рис. 10.2). При этом бесконтактное измерение видимой температуры кладки, характеризующей поток её эффективного излучения, не представляет чрезмерных технических трудностей.

На рис. 10.2 показан спектр колебательно-вращательных полос излучения углекислого газа и паров воды, характерный для несветящихся продуктов сгорания природного газа. Наибольший интерес представляют данные по  $\varepsilon_{\lambda}^{H_2O} = f(\lambda, \rho_{H_2O}, L, T)$ , так как известно, что при средних ( $1000 \div 2000$  °С) и высоких температурах пары воды имеют непрерывный спектр, вследствие перекрытия основных полос излучения. Эта зависимость была уточнена на ЭВМ с использованием статистической модели узкой полосы и спектроскопических данных. Данные по спектру  $CO_2$  носят ориентировочный характер, поскольку сильная селективность спектра углекислого газа известна.

Анализ рисунка 10.2 показывает, что наибольший интерес представляет ближняя инфракрасная область ( $\lambda \leq 1,3$  мкм), которая включает диапазон видимого излучения. А также очень узкие участки перекрытия полос  $H_2O$  в районах 1,69; 2,19; 3,9 мкм, где  $\varepsilon_{\lambda}^{H_2O}$  минимальна и составляет 1÷5% на пути визирования 3 м, в диапазоне температур  $1200 \div 1700$  °С.. Имеются, конечно, серьёзные опасения об отсутствии в промышленных условиях «окон прозрачности» из-за взвешенных частичек окисленного металла и продуктов сгорания топлива.

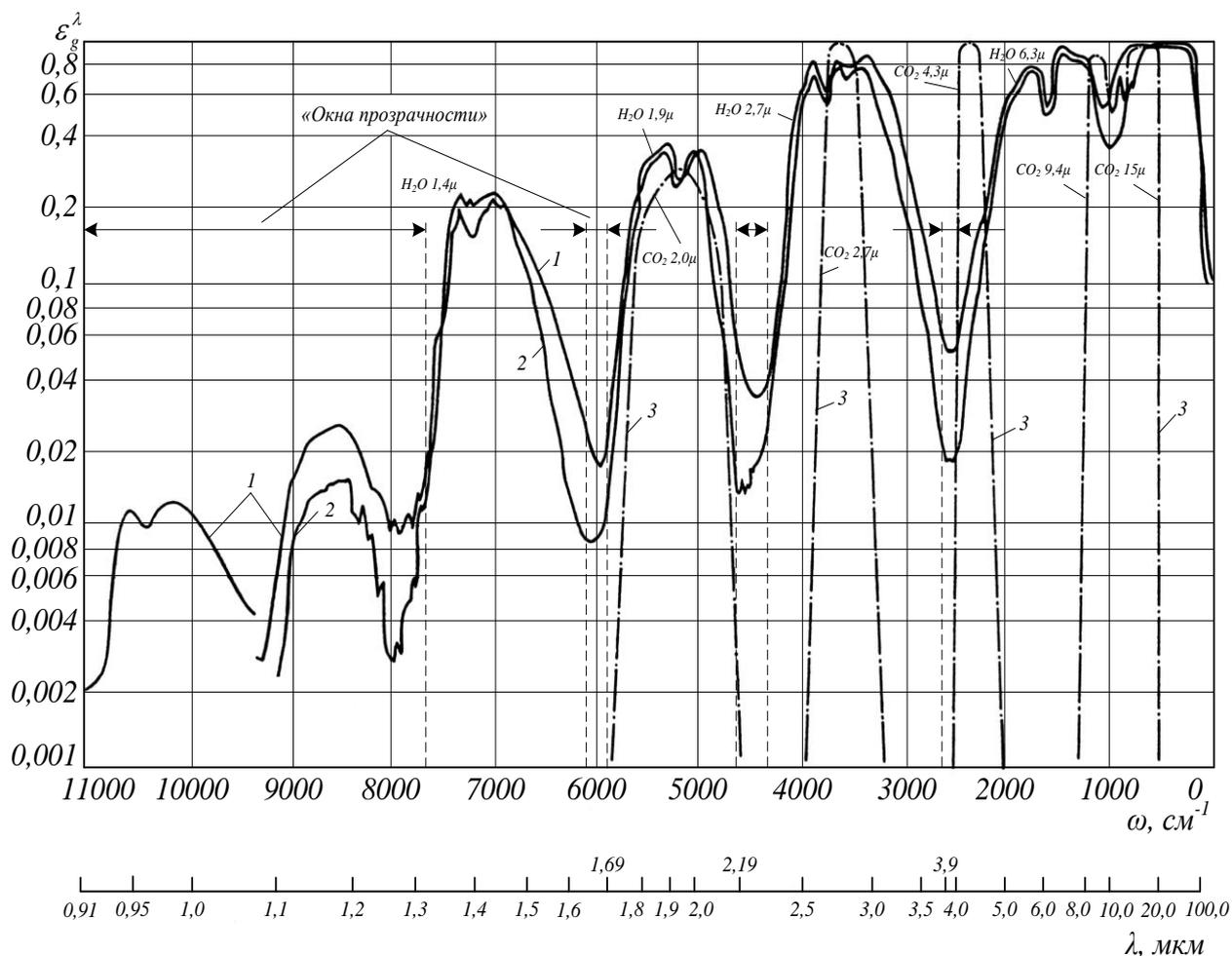


Рис. 10.2. Спектральная степень черноты основных продуктов сгорания  $\varepsilon_g^\lambda$  в зависимости от длины волны  $\lambda$ :  $\mu$  – мкм; 1 –  $\text{H}_2\text{O}$  при  $T=2000$  К и  $\rho_{\text{H}_2\text{O}}L=0,6$  атм·м (0,06 МПа·м); 2 –  $\text{H}_2\text{O}$  при  $T=1500$  К и  $\rho_{\text{H}_2\text{O}}L=0,6$  атм·м (0,06 МПа·м); 3 –  $\text{CO}_2$  при  $T=830$  К и  $\rho_{\text{CO}_2}L=3,88$  атм·м (0,38 МПа·м).

Проведённые на действующей печи исследования позволили сделать следующие выводы:

а) при автоматическом поддержании необходимого соотношения «топливо-воздух» в промышленных печах, отапливаемых природным газом, реализуется возможность бесконтактных измерений видимых температур металла и кладки в «окнах прозрачности» спектра продуктов сгорания;

б) при измерении видимой температуры поверхности металла в «окне прозрачности» образование фоновой засветки полностью определяется потоком эффективного фонового излучения кладки;

в) в реальных условиях действующей печи скорость изменения температуры кладки достигает  $1 \div 3$  °С/с. Поэтому для регистрации фонового излучения кладки требуется использование датчиков с временем установления не более  $1 \div 2$  с.

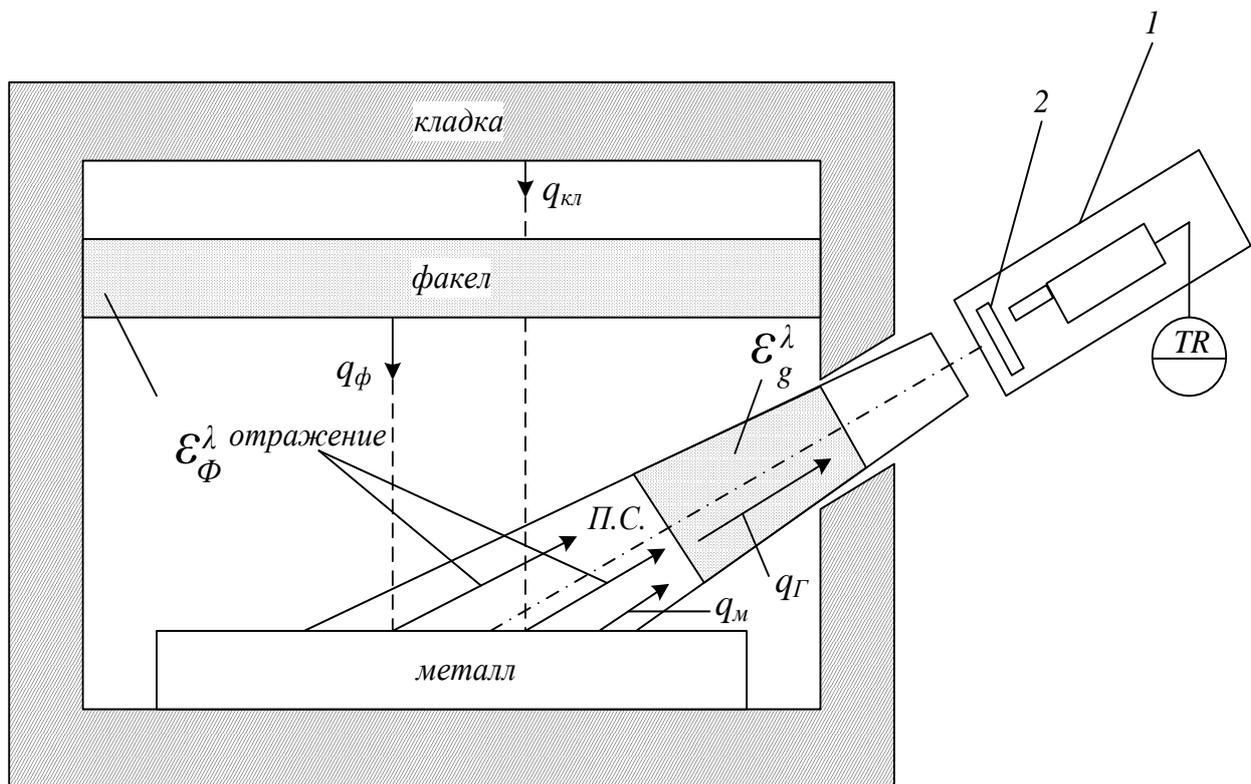


Рис. 10.3. Особенности измерений в рабочем пространстве энерготехнологических агрегатов: 1 – пирометр излучения; 2 – интерференционный светофильтр; П.С. – продукты сгорания.

### 10.3 Измерение температуры поверхности материала с использованием двух пирометров

При измерении температуры материала в замкнутом рабочем пространстве высокотемпературных агрегатов, в составе потока собственного излучения от материала на чувствительный элемент пирометра попадает поток отражённого от поверхности этого материала излучения третьих тел (факел, кладка свода, стен, и т.д.) – см. рис. 10.3.

Например, в одном из экспериментов на печи со светящимся факелом (см. рис. 10.3) при использовании пирометра с эффективной длиной волны  $\lambda_{эф} = 0,9$  мкм излучение пламени кладки, отражённое от поверхности металла, составляло 64% всего излучения, получаемого пирометром. Это приводит к тому, что видимая температура металла превышала истинную температуру на 133 °С несмотря на достаточно высокий уровень действительной температуры поверхности металла (1093 °С).

В то же время как показывают результаты экспериментов на действующих печах, реализуется практическая возможность бесконтактных измерений температуры поверхностей металла и кладки в «окнах прозрачности» спектра продуктов сгорания природного газа. При этом для пирометра, свизированного на металл, остаётся лишь одна составляющая

фоновой засветки – поток отражённого от поверхности металла эффективного излучения кладки. Эта фоновая засветка может быть найдена и скомпенсирована с помощью второго пирометра, свизированного на поверхность кладки. Таким образом, для измерения температуры поверхности металла в пламенной печи необходимо использование двухдатчиковой пирометрической системы. Известно несколько вариантов метода двух пирометров. Одна из схем указанного метода измерения температуры поверхности металла, которая получила своё практическое применение в работах под руководством В. Г. Лисиенко, приведена на рисунке 10.4.

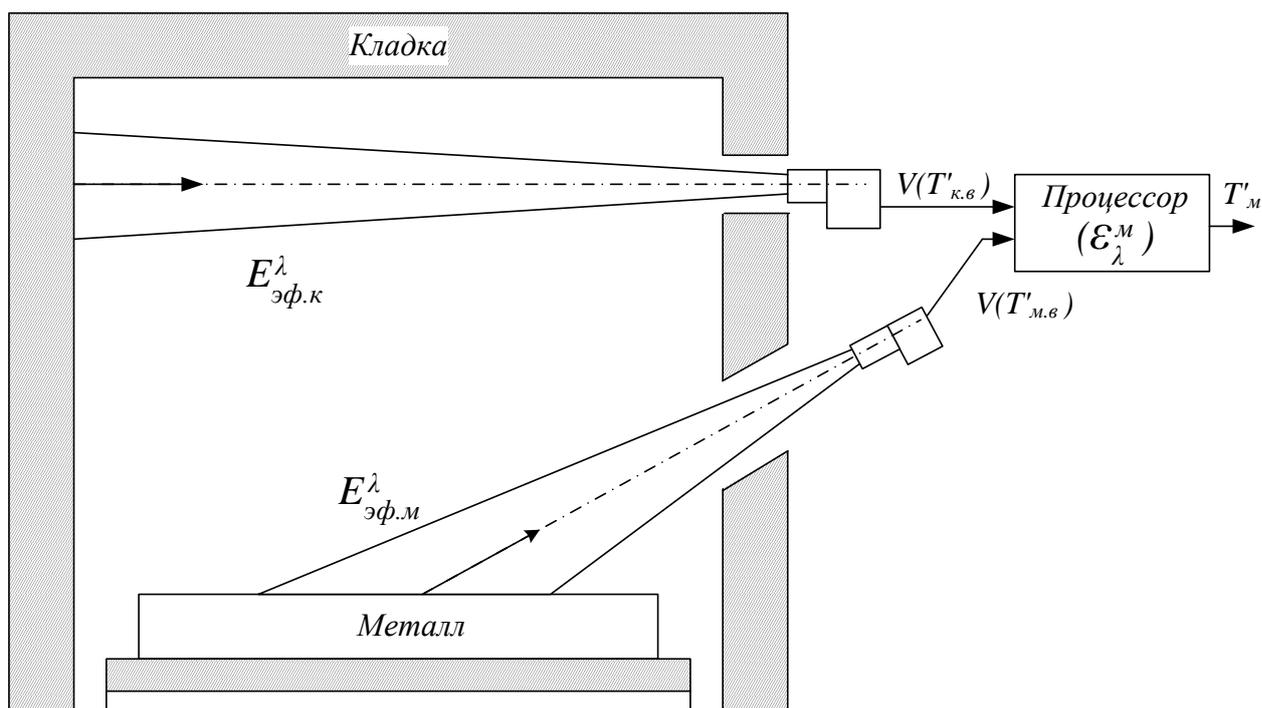


Рис. 10.4. Измерение температуры металла методом двух пирометров.

Узость спектральных интервалов «окон прозрачности» (рис. 10.2) приводит к необходимости использования квазимонохроматических пирометров излучения. Такой пирометр, свизированный на поверхность металла, будет регистрировать спектральную плотность его эффективного излучения:

$$E_{эф.м}^\lambda = \epsilon_m^\lambda E_0^\lambda(T_m) + (1 - \epsilon_m^\lambda) E_{пад.м}^\lambda, \quad (10.8)$$

где  $\epsilon_m^\lambda$  – спектральная степень черноты металла;

$T_m$  – действительная температура металла;

$E_{пад.м}^\lambda$  – падающее на металл излучение кладки.

Спектральная поверхностная плотность излучения АЧТ для температурного диапазона пламенных печей может быть аппроксимирована законом Вина (10.2).

Определим видимую температуру металла  $T_{м.в}$  – соотношением  $E_{эф.м}^\lambda = E_0^\lambda(T_{м.в})$ . Тогда показания пирометра, свизированного на металл будут равны:

$$T'_{м.в} = T_{м.в} \pm \Delta T_{пир}, \quad (10.9)$$

где  $\Delta T_{пир}$  – инструментальная погрешность пирометра.

Аналогично можно определить среднюю видимую температуру кладки  $\bar{T}_{к.в}$ , которая характеризует спектральную плотность падающего на металл эффективного излучения:  $E_{пад.м}^\lambda = E_{эф.к}^\lambda = E_0^\lambda(\bar{T}_{к.в})$ . Показания пирометра, свизированного на некоторый участок кладки  $T'_{к.в}$  будут отличаться от  $\bar{T}_{к.в}$  (см. рис. 10.4).

$$T'_{к.в} = \bar{T}_{к.в} + \Delta \bar{T}_{к.в} + \Delta T_{пир}, \quad (10.10)$$

где  $\Delta \bar{T}_{к.в}$  – погрешность измерений  $\bar{T}_{к.в}$ , вызванная непредставительностью точки визирования.

После подстановки уравнения (10.2) в (10.8) с учётом выведенных отношений  $T'_{м.в}$  и  $\bar{T}_{к.в}$  получим соотношение, определяющее показания пирометра свизированного на металл:

$$T'_{м.в} = - \frac{C_2 / \lambda}{\ln \left[ \varepsilon_m^\lambda \exp\left(-\frac{C_2}{\lambda T_m}\right) + (1 - \varepsilon_m^\lambda) \exp\left(-\frac{C_2}{\lambda \bar{T}_{к.в}}\right) \right]} \pm \Delta T_{пир}. \quad (10.11)$$

Разность  $\Delta T'_m = T'_{м.в} - T_m$  представляет собой погрешность измерения температуры поверхности металла одним пирометром. Эта величина зависит от четырёх переменных:  $\Delta T'_m = f(\varepsilon_m^\lambda, T_m, \bar{T}_{к.в}, \Delta \bar{T}_{пир})$ . Анализ измерения  $T_m$  и  $\bar{T}_{к.в}$  в процессе нагрева металла в проходных печах прокатных станов показывает, что существует характерное соответствие между этими величинами. В качестве примера, представленная на рис. 10.5 типичная зависимость  $\bar{T}_{к.в}$  от  $T_m$  для условий нагревательной печи позволяет оценить величину  $\Delta T'_m$  для различных зон печи, которые отличаются значением  $T_m$ .

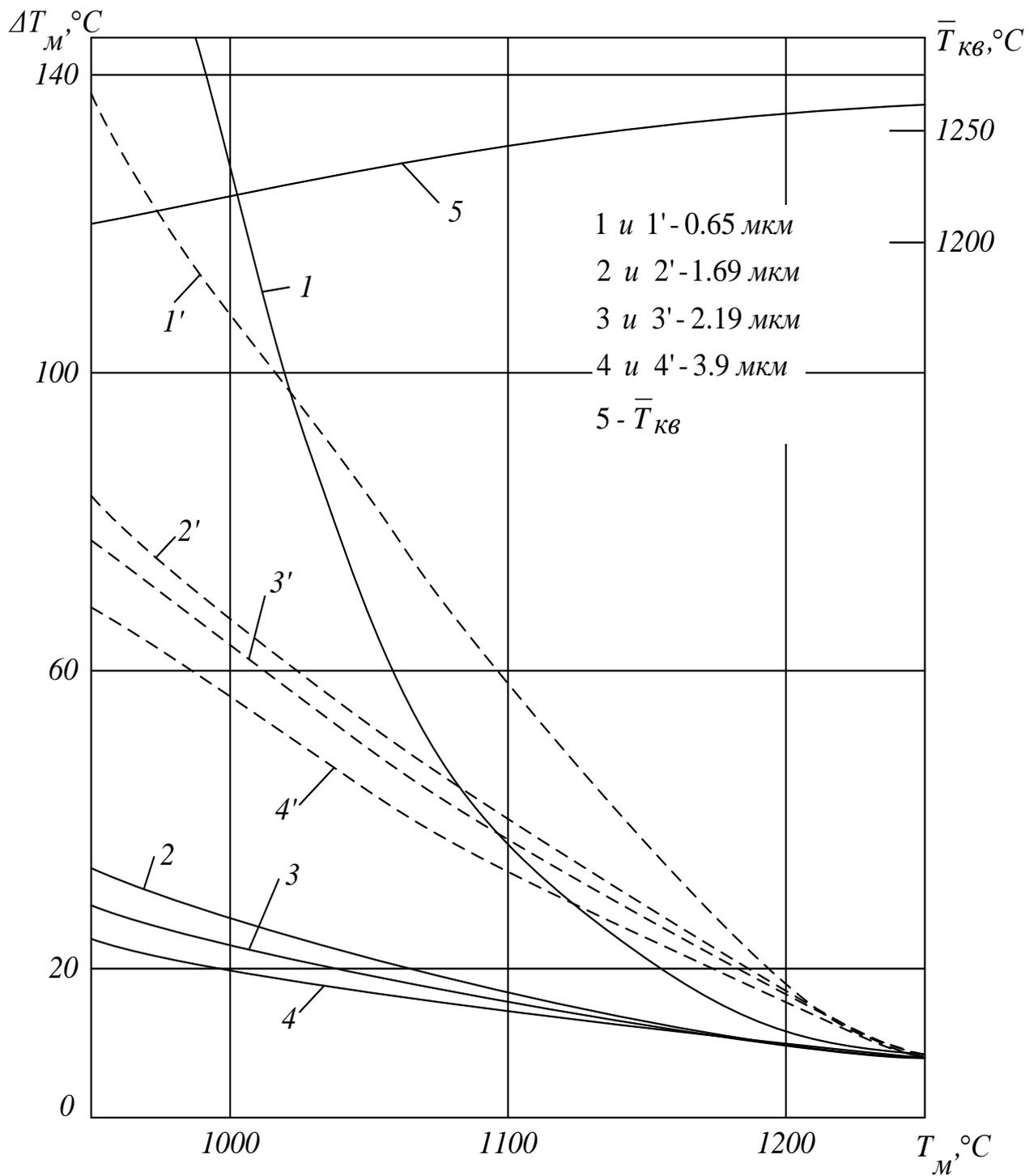


Рис. 10.5. Оценка максимальных погрешностей измерения температуры поверхности металла различными методами в процессе его нагрева: 1-4 – метод двух пирометров ( $\Delta T_M'$ ); 1'-4' – один пирометр, свизированный на металл ( $\Delta T_M'$ ):  $\varepsilon_m^\lambda = 0,8$ ;  $\Delta T_{\text{пир}} = \pm 5 ^\circ\text{C}$ ;  $\delta \varepsilon_m^\lambda = \pm 0,05$ .

Что касается величины спектральной степени черноты поверхности, то тут следует принять во внимание, например, окисление поверхности металла в ходе нагрева. При нагреве по мере образования и увеличения толщины окисной плёнки на поверхности металла, характер излучения изменяется от «металлического» к «неметаллическому», достигая некоторого стабильного значения излучательной способности к моменту, когда плёнка становится полностью непрозрачной для излучения на данной эффективной длине волны. В частности, спектральная степень черноты окисленных поверхностей многих углеродистых и легированных сталей  $\lambda = 0,65$  мкм при температурах выше  $900^\circ\text{C}$  изменяется в довольно небольшом диапазоне –  $0,75 \div 0,85$ , что соответствует относительному разбросу погрешности величины степени черноты  $\varepsilon_m^\lambda = \pm 6,25\%$  от среднего значения  $\varepsilon_m^\lambda = 0,8$ . Для других спектральных диапазонов надёжные данные по  $\varepsilon_m^\lambda$  отсутствуют, но ряд исследований говорит о том, что в инфракрасной области степень черноты окалина достаточно стабильна и достигает значений  $0,9 \div 0,95$ .

Результаты количественной оценки методической погрешности измерения температуры поверхности металла одним квазимонохроматическим пирометром  $\Delta T'_m$  для различных длин волн, соответствующих «окнам прозрачности» печной атмосферы, приведены на рис. 10.2. Расчёты проводились в предположении, что в условиях действующих печей спектральная степень черноты металла имеет относительный разброс  $\delta\varepsilon_m^\lambda = \pm 0,05$  (или 5%). В связи с этим, приведённые на рис. 10.5 зависимости  $I'-4'$ , характеризующие максимальную для заданных условий погрешность  $\Delta T'_m$ , соответствуют  $\varepsilon_m^\lambda = 0,76$ . Расчёты показали, что влияние фоновой засветки значительно, практически для любой длины волны, и измерения одним пирометром могут производиться лишь в условиях, при которых температуры кладки и металла близки. Для остальных зон необходима коррекция показаний пирометра, которая, как показали предварительные исследования, но может быть статической.

Метод двух пирометров см. рис. 10.4 позволяет вводить автоматическую компенсацию фоновой засветки, однако его методическая погрешность зависит от большего числа факторов. Для того чтобы оценить эту погрешность, необходимо ввести понятия расчётной температуры поверхности металла  $T'_m$  при использовании метода двух пирометров и задаваемое в расчётах наиболее вероятное значений степени черноты

металла  $\varepsilon'_m$ . Фактическая же степень черноты металла в силу имеющегося разброса будет отличаться от задаваемой:

$$\varepsilon_m^\lambda = \varepsilon'_m (1 \pm \delta\varepsilon_m^\lambda). \quad (10.12)$$

Подставляя соотношение (10.12) в (10.11) и, таким образом, учитывая фактическое изменение показаний пирометра, свизированного на металл, при колебаниях  $\varepsilon_m^\lambda$ , а также с использованием уравнений (10.2), (10.9), (10.10) для метода двух пирометров получим:

$$T'_m = - \frac{C_2 / \lambda}{\ln \left[ \frac{1}{\varepsilon_m} \exp\left(-\frac{C_2}{\lambda T_{m.в}}\right) - \frac{(1 - \varepsilon'_m)}{\varepsilon'_m} \exp\left(-\frac{C_2}{\lambda T'_{к.в}}\right) \right]}. \quad (10.13)$$

Разность  $\Delta T_m = T'_m - T_m$  представляет собой интересующую нас методическую погрешность метода измерения температуры поверхности металла, с использованием двух пирометров. Поскольку в выражении (10.13) используются величины, определяемые соотношениями (10.10) – (10.12), очевидна зависимость этой погрешности от шести переменных:  $\Delta T_m = f(\varepsilon_m^\lambda, T_m, \bar{T}_{к.в}, \delta\varepsilon_m^\lambda, \Delta \bar{T}_{к.в}, \Delta T_{пир})$ . В связи с этим представляет интерес сопоставление  $\Delta T_m$  и  $\Delta T'_m$ . Результаты расчётной оценки  $\Delta T_m$  показан для условий, аналогичных анализу  $\Delta T'_m$ . Покажем что с помощью коррекции (10.13) результат измерения может быть существенно улучшен. Однако область применимости метода ограничена и зависит от длины волны используемых пирометров. Так, пирометры, работающие в видимой области спектра ( $\lambda = 0,65$  мкм) могут быть использованы лишь в конце зон нагрева, где разность  $\bar{T}_{к.в}$  и  $T_m$  не превышает 70 – 80 °С. Пирометры, работающие в инфракрасной области спектра, расширяют указанный диапазон до 150-200 °С, и среди них предпочтительным оказывается пирометр с длиной волны  $\lambda = 3,9$  мкм.

На рисунке 10.6 показана реализация метода двух пирометров на кольцевой нагревательной печи для нагрева трубных заготовок.

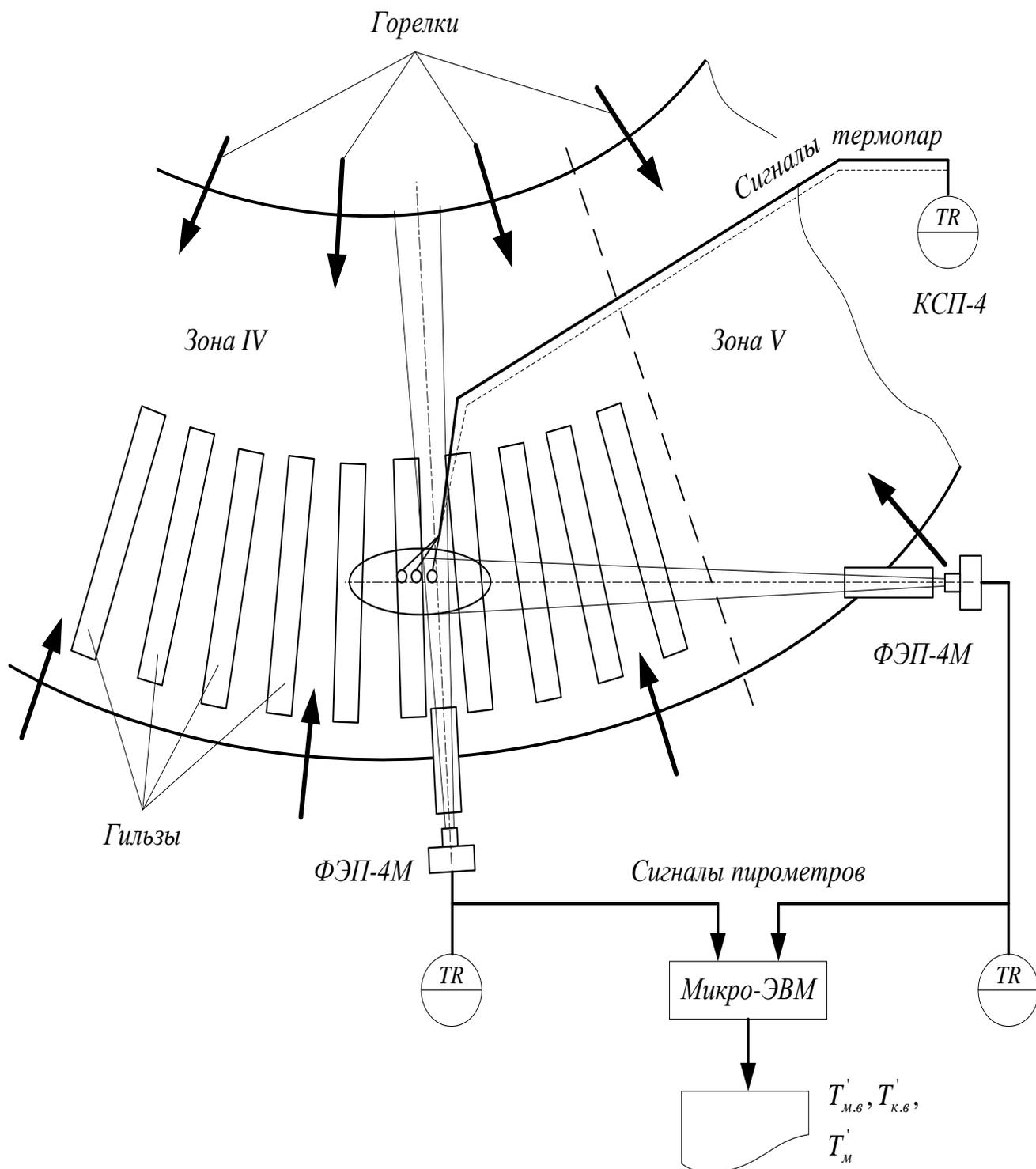


Рис. 10.6. Схема эксперимента проводимого на кольцевой печи для анализа работоспособности метода двух пирометров с использованием контрольных термопар зачеканенных в трех точках контрольной заготовки.

## Заключение

Современный уровень бурного развития информационных технологий и компьютерной техники подкрепляется соответствующим повышением уровня математического моделирования процессов и технологий. Естественно, что применительно к автоматизированному управлению в соответствии с основными задачами и функциями этого управления методы математического моделирования имеют свою специфику, как в структурах математических моделей, так и в подходах к разработке самих математических моделей. Как показано в данном учебном пособии, математические модели являются основой реализации основных функций современных АСУ ТП: локального регулирования, оценивания, идентификации, оптимизации и диагностики. Современный уровень в этом плане характеризует все большим вторжением самых сложных имитационных математических моделей в процессе автоматического управления. При этом они используются для создания виртуальных объектов, для отработки моделей реального времени верхнего уровня АСУТП, для проведения модельной идентификации и оптимизации.

Применительно к автоматизированным системам при этом используются комплексные подходы построения математических моделей, сочетающие детерминированные и стохастические подходы.

Нам представляется, что если закон Гордона Мура продолжает действовать в отношении вычислительной техники (снижение размеров транзисторов в два раза в течение 2 лет), то и в области автоматизированного управления и информационно-управляющих систем все более активно и представителью будут использоваться методы математического моделирования.

Конечно, материалы данного учебного пособия во многом отражают опыт авторов в области автоматизированного управления, который касается в основном энерготехнологических объектов, но и современные тенденции в развитии экономики нашей страны, да и всего мира свидетельствуют о чрезвычайной актуальности повышения энергоэффективности этих объектов, актуальности решения проблем энергосбережения и экологической безопасности. Методы автоматизированного управления во многом обеспечивает возможности эффективного решения этих важных проблем.

## ГЛОССАРИЙ

**АСУ ТП (Автоматизированная система управления технологическими процессами)** – это автоматизированная система управления для выработки и реализации управляющих воздействий на технологический объект управления в соответствии с принятым критерием управления и заданными ограничениями.

**Детерминированный подход** – это метод определения математической модели, использующий химические, физические, физико-химические, информационные законы и закономерности.

**Идентификация математических моделей** – это методы и способы построения и корректировки математических моделей технологических процессов, объектов управления с использованием стохастических подходов на базе эксперимента.

**Идентификация процесса** – построение математической модели, устанавливающей закономерность между выходными и входными переменными процесса.

**Имитационная модель** – логико-математическое описание объекта, которое может быть использовано для экспериментирования на компьютере в целях проектирования, анализа и оценки функционирования объекта.

**Имитационное моделирование** представляет собой численный метод проведения на ЭВМ вычислительных экспериментов с математическими моделями, имитирующими поведение реальных объектов, процессов и систем во времени в течение заданного периода.

**Логические модели** – это модели, в которых применяем аппарат логики.

**Математическая модель** – это система уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных, линейных и нелинейных), которая достаточно полно отражает наиболее характерные черты и особенности объектов управления и технологических процессов в соответствии с целями автоматизированного управления.

**Математическое программирование** – математическая дисциплина, изучающая теорию и методы решения задач о нахождении экстремумов функций на множествах конечномерного векторного пространства, определяемых линейными и нелинейными ограничениями (равенствами и неравенствами).

**Метод Монте-Карло** – это численный метод, моделирующий на ЭВМ псевдослучайные числовые последовательности с заданными вероятностными характеристиками.

**Оптимальные системы** – это системы, при функционировании которых достигается экстремум некоторого выбранного заранее критерия качества (критерия оптимальности).

**Оценивание** – это задача восстановления состояний процесса по информации об его входах (управлениях и контролируемых возмущениях) и выходах (наблюдениях) с использованием модели процесса и некоторой рекуррентной процедуры (фильтра).

**Параметрическая идентификация** – это процесс переопределения параметров  $A$  в режиме нормальной эксплуатации объекта, при этом структура математической модели известна и выглядит следующим образом  $St: Y=F(X, U, A)$ .

**Статистическая модель случайного процесса** – это алгоритм, с помощью которого имитируют работу сложной системы, подверженной случайным возмущениям; имитируют взаимодействие элементов системы, носящих вероятностный характер.

**Статистическое моделирование** – это способ изучения сложных процессов и систем, подверженных случайным возмущениям, с помощью имитационных моделей.

**Стохастический подход** – это вероятностный метод определения математической модели, на базе эксперимента.

**Теории сложных систем** – теория, в которой рассматриваются стохастические взаимодействия различных, в том числе и случайных, процессов и явлений.

**Управление** – это принятие решения о том, каковы должны быть значения задаваемых величин в различных процессах.

**Феноменологические модели** – это модели, в которых применяются закономерности известного объекта для описания неизвестного объекта.

**«Черный ящик»** – объект управления или технологический процесс, о котором отсутствует априорная информация об его математической модели, т.е. информация о функциональной связи между входом и выходом объекта.

**Эксперимент** – организация оценки параметров состояния объектов или процессов, которые осуществляются в условиях близких к естественным, либо в условиях при которых имитируются эти условия.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров А. Г. и др. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 711 с.
2. Александров А. Г. Оптимальные и адаптивные системы. – М.: Высшая школа, 1989. – 264 с.
3. Антонов А. В. Системный анализ. – М.: Высшая школа, 2004. – 454 с.
4. Ашихмин В. Н., Бояршинов М. Г., Гитман М. Б. и др. Введение в математическое моделирование: Учебное пособие для вузов / Под редакцией П. В. Трусова. – М.: Интермет Инжиниринг, 2000. – 336 с.
5. Балакришнан А. Теория фильтрации Калмана / Под редакцией А. А. Новикова. – М.: Мир, 1988. – 166 с.
6. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. / Под редакцией В. А. Волконского. – М.: Радио и связь, 1988. – 127 с.
7. Борисов Ю. П., Цветнов В. В. Математическое моделирование радиотехнических систем и устройств. – М.: Радио и связь, 1985. – 177 с.
8. Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем. – М.: Наука, 1978. – 399 с.
9. Веников В. А., Веников Г. В. Теория подобия и моделирования. Учебник для вузов М.: Высшая школа. 1984. – 439 с.
10. Венькович С. Е., Колесов Ю. В., Синеченков Ю. Б. Практическое моделирование динамических систем. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 464 с.
11. Винер Н. Человек управляющий. – СПб: Питер, 2001. – 288 с.
12. Винер Н. Кибернетика, или управление и связь в животном и машине. 2-е изд. – М.: Наука, 1983. – 343 с.
13. Герман-Галкин С. Г. Компьютерное моделирование полупроводниковых систем в MATLAB 6.0 : Уч. пособие. – СПб.: КОРОНА, 2001. – 320 с.
14. Гроп Д. Методы идентификации систем управления. – М.: Мир, 1979. – 302с.
15. Гущин С. Н., Лисиенко В. Г., Кутвин В. Б. Моделирование и управление тепловой работой стекловарных печей. – Екатеринбург: УГТУ, 1997. – 398 с.
16. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. Перевод с английского Б.И. Копылова. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 832 с.
17. Дружинина О. Г. Моделирование систем: курс лекций ч.1. – Екатеринбург: ООО "Издательство УМЦ УПИ», 2002. – 90 с.
18. Дружинина О. Г. Моделирование систем: курс лекций ч.2. – Екатеринбург: ООО "Издательство УМЦ УПИ», 2003. - 103 с.
19. Ермаков С. М., Бродский В. З., Жиглявский А. А. и др. Математическая теория планирования эксперимента. / Под редакцией С. М. Ермакова. – М : Наука, 1983. – 391 с.

20. Зобнин Б. Б. Моделирование систем. – Екатеринбург: УГГГА, 2001. – 128 с.
21. Зотов Н. С., Назаров О. В., Петелин Б. В., Яковлев В. Б. Автоматизированное управление технологическими процессами. Учебное пособие. Под редакцией В. Б. Яковлева. – Л.: ЛГУ, 1988. – 224 с.
22. Киричков В. Н. Идентификация систем управления технологическими процессами. Учебное пособие. Киев: «Высшая школа», 1990 – 264 с.
23. Кочетыгов А. А. Методы идентификации. Учебное пособие. – Тула: ТГУ, 2001. – 220с.
24. Кузнецов В. И., Пчелинцев Л. А. Последовательное обучение систем диагностики. М: Энергоатомиздат, 1987. – 112 с.
25. Кузякин В. И. Компьютерные системы диагностики бурового и нефтегазового оборудования. / Под редакцией В. Г. Лисиенко. – Екатеринбург: ЦНТИ, 1997. – 75 с.
26. Кузякин В. И., Лисиенко В. Г., Меньщиков В. А. Информационно-измерительные системы: теория, моделирование, проектирование, применение. – Екатеринбург: Издательство АМБ, 2005. – 208 с.
27. Лазарев Ю. Моделирование систем и процессов в MATLAB: Учебный курс. – СПб.: Питер: Киев: Издательская группа BHV, 2005. – 512 с.
28. Лисиенко В. Г., Бабенко А. Г., Дюгай П. А. и др. Моделирование и разработка систем диагностики технологического процесса для управления качеством продукции (на примере непрерывного литья заготовок). / Под редакцией Лисиенко В. Г. – Новоуральск: НГТИ, 2008. – 132 с.
29. Лисиенко В. Г., Волков В. В., Гончаров А. Л. Математическое моделирование теплообмена в печах и агрегатах. – Киев: Наукова Думка, 1984. – 232 с.
30. Лисиенко В. Г., Волков В. В., Маликов Ю. К. Усовершенствование топливоиспользования и управление теплообменом в металлургических печах. – М.: Металлургия, 1998. – 231 с.
31. Лисиенко В. Г. Методы идентификации теплообмена в пламенных печах. – М.: Металлургия, 1979. – 224 с.
32. Лисиенко В. Г. Принципы построения трехуровневых АСУ ТП объектов с распределенными параметрами на примере АСУ нагревом материала. Учебное пособие. Екатеринбург: УГТУ, 1999. – 73 с.
33. Лисиенко В. Г., Салихов З.Г., Гусев О. А. Моделирование объектов с распределенными параметрами на примере трехуровневых АСУ нагревом материала. Учебное пособие. – Екатеринбург: УГТУ-УПИ. – М.: МИСиС, 2004. – 163 с.
34. Лисиенко В. Г., Суханов Е. Л., Морозова В. А. и др. Развитие трехуровневых АСУТП в металлургии (коксовые и бескоксовые процессы). Учебное пособие. – М.: Теплотехник, 2006. – 328 с.
35. Лисиенко В. Г., Суханов Е. Л., Морозова В. А., Овчинников Ю. Н. Структура трехуровневой АСУ ТП доменной печи с использованием логико-

количественной экспертной системы. – Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2003. – 82 с.

36. Лисиенко В. Г., Чистов В. П., Пареньков А. Е. и др. Принципы построения экспертных систем в металлургии на примере экспертной системы «Советчик мастера доменной печи». Учебное пособие. – Екатеринбург: УГТУ, 1996. – 45 с.

37. Лисиенко В. Г., Щёлоков Я. М., Ладыгичев М. Г., Плавиальные агрегаты, теплотехника, управление и экология. Справочное издание в 4-х книгах. / Под ред. В.Г. Лисиенко. кн.1, кн.2. – М.: Теплотехник, 2005 – 768 с. (кн.1), 912 с. (кн.2).

38. Лисиенко В. Г., Щёлоков Я. М., Ладыгичев М. Г. Топливо. Рациональное сжигание, управление и технологическое использование. Справочное пособие в трех книгах / под редакцией В.Г. Лисиенко кн. 1, кн. 2. – М.: Теплотехника, 2003. – 608 с. (1 кн.), 832 с. (2 кн).

39. Льюнг Л. Идентификации систем. Теория для использования. – М.: Наука, 1991. – 432 с.

40. Мальков В. М., Вершинин В. Е. Автоматизированные системы управления технологическими процессами. – М.: Политехника, 1991. – 240 с.

41. Методы классической и современной теории управления. Учебник в 5 томах. / Под редакцией Пупкова К. А. и Егупова Н. Д. – М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана. – Т. 1: Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического регулирования, 2004. – 656 с.; т. 2: Статистическая диагностика и идентификация систем автоматического управления, 2004. – 640 с.; т. 3: Синтез регуляторов систем автоматического управления, 2004. – 616 с.; т. 4: Теория оптимизации систем автоматического управления, 2004. – 744 с.; т. 5: Методы современной теории автоматического управления, 2004. – 784 с.

42. Мжельский Б. И., Мжельская В. А. Инженерные методы решения задач оптимизации. Учебное пособие. – М.: Издательство МЭИ, 1998. – 68 с.

43. Минаев Ю. Н., Филимонова О. Ю., Бенамеур Лиес. Методы и алгоритмы идентификации и прогнозирования в условиях неопределенности. – М: Горячая линия -Телеком. 2003. – 205 с.

44. Парк Дж., Маккей С., Райт Э. Передача данных в системах контроля и управления: Практическое руководство. – М: ООО «Группа ИТД», 2007. – 480 с.

45. Петров Б. Н., Уланов Г. Н., Гопьденблат И. И., Ульянов С. В. Теория моделей в процессах управления. – М.: Наука, 1978. – 223 с.

46. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.

47. Полляк Ю. Г., Филимонов В. А. Статистическое машинное моделирование средств связи. – М.: Радио и связь, 1988. – 175 с.

48. Пономарев Н. Н., Ширяев Е. В., Тюков Н. И. Параметрическая идентификация динамических объектов в системах управления с микроЭВМ: Учебное пособие. Ура: УГАТУ, 1999.

49. Рей У. Методы управления технологическими процессами. – М.: Мир, 1983
50. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике. В 2-х книгах. – М.: Мир, 1986. – 350 с. (кн. 1), 320 с. (кн. 2).
51. Рыжиков Ю. И. Имитационное моделирование. Теория и практика. – СПб.: КОРОНА принт; М.: Альянс-А, 2004. – 384 с.
52. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. М.: Наука. Физматлит, 1997. – 320 с.
53. Советов Б. Я., Яковлев С. А. Моделирование систем. Учебник для вузов. – М.: Высшая школа., 2003. – 295 с.
54. Спирин Н. А., Лавров В. В. Шаврин В. С. Оптимизация и оценивание технологических процессов в металлургии: Учебное пособие. – Екатеринбург: УГТУ, 1996. – 188 с.
55. Страшинин Е. А. Основы теории автоматического управления. Ч1. Линейные непрерывные системы управления. Учебное пособие. – Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2002. – 214 с.
56. Тарасик В. П. Математическое моделирование технических систем: Учебник для вузов. – М.: Наука, 1997. – 600 с.
57. Трухин М. П. Моделирование систем. Методические указания по выполнению лабораторных работ. – Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2003. – 53 с.
58. Хазан Г. Л., Лисиенко В. Г., Бабенко А. Г., Бажин В. Ю. Альтернативные методы диагностики состояния многофакторного процесса. // Расплавы, 2006. №4. – с. 77-81.
59. Циркин А. М. Оптимальное управление технологическими процессами. – М.: Энергоатомиздат, 1986.
60. Современная прикладная теория управления. Под редакцией А.А.Колесникова. Ч1. Оптимизационный подход в теории управления. – Таганрог: изд-во ТРГУ, 2000, - 400 с.
61. Современная прикладная теория управления. Под редакцией А.А.Колесникова. Ч2. Синергетический подход в теории управления. – Таганрог: изд-во ТРГУ, 2000, - 559 с.
62. Современная прикладная теория управления. Под редакцией А.А.Колесникова. Ч3. Новые классы регулирования технических систем. – Таганрог: изд-во ТРГУ, 2000, - 665 с.

Учебное издание

Лисиенко Владимир Георгиевич  
Дюгай Павел Алексеевич  
Волков Валерий Владимирович  
Еголаев Василий Викторович  
Баннх Антон Евгеньевич

**Моделирование и автоматизированное управление.**

Научный редактор проф. д.т.н. В. Г. Лисиенко  
Компьютерная верстка Баннх А. Е.

Подписано в печать 26.11.09 Формат 60x84 1/16. Бумага писчая. Печать плоская. Усл.печ.л. 12,73. Усл.изд.л. 11,07. Тираж 100. Заказ . Цена «с». РИО ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» – Новоуральский технологический институт», г.Новоуральск. Отпечатано в отделении ИВТОБ 620002 ,Екатеринбург,ул. Мира 19, ауд.И-120 тел.(343)375-41-43, opivtob@mail.ustu.ru